THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

E. DEFFONTAINES

Licencié ès Sciences physiques — Diplomé d'Études supérieures
Professeur à l'Institut supérieur d'électronique du Nord

1re THÈSE. — « Prédiction d'une trajectoire à partir de mesures antérieures bruitées et échantillonnées ».

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
« Étude de la stabilité de systèmes non linéaires à l'aide du critère de Popov ».

Soutenues le 25 Mars 1966 devant la Commission d'examen.

MM. BLAQUIÈRE . . . *Président.*
BONNEFILLE . . } *Examinateurs.*
PELEGRIN . . . . }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE
1966

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ÉTUDE DE LA STABILITÉ DE SYSTÈMES NON LINÉAIRE A L'AIDE DU CRITÈRE DE POPOV

Vu et approuvé :

Paris, le 11 mars 1966.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN ROCHE

UNIV. LEIDEN BIBL.

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

E. DEFFONTAINES

Licencié ès Sciences physiques — Diplomé d'Études supérieures
Professeur à l'Institut supérieur d'électronique du Nord

1re THÈSE. — « Prédiction d'une trajectoire à partir de mesures antérieures bruitées et échantillonnées ».

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

« Étude de la stabilité de systèmes non linéaires à l'aide du critère de Popov ».

Soutenues le 25 Mars 1966 devant la Commission d'examen.

MM. BLAQUIÈRE . . . *Président.*
BONNEFILLE . . } *Examinateurs.*
PELEGRIN . . . . }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE
1966

Cette thèse a été éditée par le *Mémorial de l'Artillerie Française* dans son 2e fascicule de 1966. Le présent tiré à part a conservé la pagination de ce fascicule.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546003_0023

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

PRENANT	T	Anatomie et histologie comparée.
GRASSE	T	Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER	T	Zoologie.
AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique E.N.S.
CARTAN	T	Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE	T	Chimie générale.
N	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du globe.
COUSIN (M^lle)	T	Biologie animale S.P.C.N.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
BOCQUET	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique E.N.S.
EPHRUSSI	T	Génétique.
GAUTHERET	T	Biologie végétale C.P.E.M.
LUCAS R		Recherches physiques.
THOMAS A	T	Biologie cellulaire.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique C.P.E.M.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique de l'atmosphère.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale S.P.C.N.
CAUCHOIX (M^lle)	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du globe.
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théorie physique.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et cristallographie.
MATHIEU J.P	T	Physique optique.
COUTEAUX	T	Cytologie.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (technique aéronautique).
BRELOT	T	Analyse supérieure.
NORMANT	T	Synthèse organique.
BÉNARD	T	Chimie appliquée.
DUGUE	T	Statistique mathématique.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
LE BRETON (M^lle)	T	Physiologie de la nutrition.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et histologie comparées.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique S.P.C.N.
GLANGEAUD	T	Géographie physique, géologie dynamique.
DODEMENT	T	Mathématiques M.G.P.
PISOT	T	Technique mathématique de la physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Géologie générale.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique M.G.P.
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
TONNELAT (M^me)	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques M.P.C.
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies.
CHAIX (M^me)	T	Chimie biologique.
HUREL-PY (M^me)	T	Biologie végétale C.P.E.M.
PANNETIER	T	Chimie générale I.
BRUN	T	Mécanique des fluides I.
DUBREIL (M^me)	T	Mathématiques (Agrégation).
LELONG (M^me)	T	Mathématiques II E.N.S.
BELLAIR	T	Géologie S.P.C.N.
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J.E	T	Chimie organique physique.
LAMOTTE	T	Zoologie E.N.S.
OLMER	T	Énergétique générale.
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.

Brossel	T	Physique atomique.
Buser	T	Physiologie comparée.
Camus	T	Physiologie végétale.
Curien	T	Minéralogie et cristallographie.
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann	T	Chimie quantique.
Teillac	T	Physique nucléaire et radio-activité.
Ville	T	Économétrie.
Willemart	T	Chimie C.P.E.M.
Freymann	T	Recherches physiques.
Rollet	T	Chimie minérale.
Josien (M^lle)	T	Chimie S.P.C.N.
Chevalley	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
Germain	T	Mécanique théorique des fluides.
Lucas G.	T	Géologie.
Allard	T	Chimie physique.
Berthelot	T	Physique des particules fondamentales.
Bricard	T	Météorologie.
Albe-Fessard (M^me)	T	Psycho-physiologie.
Julia M.	T	Étude des molécules naturelles complexe.
Magat	T	Physico-chimie des rayonnements.
Quintin (M^lle)	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Chatelet	T	Chimie C.P.E.M.
Mattler	T	Physique S.P.C.N.
Bouissières	T	Radiochimie.
Couture (M^me)	T	Thermodynamique et mécanique physique.
Franc	T	Biologie animale C.P.E.M.
Schnell	T	Botanique tropicale.
Stolkowski	T	Physiologie générale.
Acher	T	Chimie biologique.
Baudoin	T	Biologie animale C.P.E.M.
Beaumont		Biologie animale S.P.C.N.
Blamont		Géophysique ionosphère.
Boureau	T	Botanique.
Curie D.		Physique M.G.P.
Durand-Delga	T	Géologie.
Heller	T	Physiologie végétale.
Tortrat	T	Calcul des probabilités.
Cailleux	T	Géologie S.P.C.N.
Magnan		Physique électricité.
Daudel	T	Mécanique ondulatoire.
Fourcroy (M^lle)		Biologie végétale S.P.C.N.
Choquet-Bruhat (M^me)		Mécanique analytique et mécanique céleste.
Veil (M^lle)	T	Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique physique et expérimentale.
Cabannes	T	Mécanique générale.
Caire	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Comolet		Mécanique des fluides
Delloue	T	Physique de l'exosphère.
Houillon		Biologie animale C .P. E. M.
Olivier		Anthropologie.
Samuel	T	Mathématiques (E.N.S. Jeunes filles).
Thiry	T	Mécanique céleste.
Abeles	T	Physique S.P.C.N.
Amat	T	Thermodynamique.
Auboin	T	Géologie.
Benoit-Gueutal (M^me)	T	Physique nucléaire et radio-activité.
Bougis		Biologie végétale marine, Villefranche-sur-Mer.
Rigaudy	T	Chimie S.P.C.N.
Collongues		Chimie C.P.E.M.
Dubert		Biochimie.
Nozières		Physique générale.
Cadiot		Chimie organique.
Ivanoff		Océanographie physique.
François		Zoologie.
Talbot		Génie chimique.
Nougarède (M^me)		Botanique.
Bruhat	T	Mathématique M.P.C.
Fournet		Électricité générale.
Deheuvels	T	Mathématiques propédeutique.
Furon	T	Géologie S.P.C.N.
Gans (M^me)	T	Génétique.
Genèves		Biologie végétale C.P.E.M.
Hupe	T	Pétrographie.
Hollande	T	Biologie générale
Lions	T	Analyse numérique.
Maitte	T	Chimie organique.
Nicolas		Géologie appliquée.
Panigel		Biologie générale.
Ravier	T	Pétrographie.
Morel F.	T	Physiologie comparée.
Roseau	T	Mécanique théorique des fluides.
Roubine		Électronique E.S.E.
Silber	T	Chimie C.P.E.M.
Uebersfeld	T	Électronique.
Enon	T	Théories physiques.
Hervé	T	Mathématiques.
Pecker-Wimel (M^me)	T	Astrophysique.
Balkanski		Physique M.P.C.
Le Corre	T	Électricité.
Nataf	T	Physique nucléaire et radio-activité.
Échalier		Biologie animale C.P.E.M.
Barraud	T	Physique C.P.E.M.
Dars		Géologie structurale et appliquée.
Camefort	T	Botanique (agrégation).
Vichniewsky	T	Mécanique industrielle.
Sigwalt	T	Chimie S.P.C.N.
Blaquière		Électronique.
Baruch		Physique propédeutique.
Arnous	T	Physique théorique.
Slonimski		Génétique.
Malliavin	T	Mathématiques propédeutique.
Gaudemar		Chimie propédeutique.
Brousse	T	Mécanique théorique.
Rosch	T	Astronomie.
Guy	T	Physique expérimentale.
Lazard		Mathématiques M.P.C.
Morel P.		Physique M.P.C.
Arsac		Programmation.
Lefebvre		Chimie M.P.C.
Bok		Physique propédeutique.
Chapeville		Biochimie.

Benoit	Physique C.P.E.M.		Petit (M^me^)	Biologie animale C.P.E.M.
Rio	Chimie C.P.E.M.		Cagnac	Physique agrégation.
Jauzein	Géologie E.N.S.		Falk-Vairant	Physique nucléaire.
Prévost G.	Biologie végétale C.P.E.M.		Krasner	T Mathématiques.
Favard P.	Biologie animale C.P.E.M.		Benzecri	T Statistiques.
			Vinh Mau	Physique M.G.P.
Charniaux-Cotton (M^me^).	Évolution des êtres organisés.		Duquesnes	Physique C.P.E.M.
			Schutzenberger	Programmation.
Ficini (M^lle^)	Chimie C.P.E.M.		Tremillon	Chimie M.P.C.
Lequeux	Astronomie.		Fayard	Chimie M.P.C.
Cohen-Tannoudji	Physique atomique.		Buvet	Chimie C.P.E.M.
Tavernier	Physique C.P.E.M.		Authier	Physique M.P.C.
Durand Michel	Biologie animale S.P.C.N.		Picinbono	T Physique C.P.E.M.
			Bonnefille	Électrotechnique.
Pascaud	Physiologie.		Puiseux-Dao (M^me^)	Biologie végétale.

Secrétaire général R. Poullain

UNIVERSITÉ DE PARIS, FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

PROFESSEURS

MANGENOT	T	Biologie végétale.
JACQUINOT	T	Optique.
GUINIER	T	Électricité et physique des solides.
GRIVET	T	Électronique.
BLANC-LAPIERRE	T	Accélérateur linéaire.
L'HÉRITIER	T	Génétique des virus.
LEMÉE	T	Écologie végétale.
MOYSE	T	Physiologie végétale.
DODE	T	Chimie thermodynamique.
DENY	T	Mathématiques.
RIVIÈRE	T	Géologie générale et sédimentologie.
MICHEL	T	Chimie minérale.
MAY	T	Anatomie comparée.
DELANGE	T	Mathématiques.
CHAPELLE	T	Physique expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie.
BENOIT	T	Physiologie générale.
GUINOCHET	T	Biologie végétale S.P.C.N.
NÉRON	T	Mathématiques.
NOZERAN	T	Botanique approfondie.
CASTAING	T	Thermodynamique.
ELLENBERGER	T	Géologie structurale.
LEDERER	T	Chimie biologique.
RIZET	T	Génétique.
LENDER	T	Biologie animale S.P.C.N.
POITOU	T	Mathématiques.
FRÉON	T	Chimie organique.
TONNELAT	T	Biologie physico-chimique.
BRUNN	T	Géologie historique.
JEAN M.	T	Physique nucléaire.
BERGERARD	T	Zoologie.
ROGER	T	Paléontologie.
LEFORT	T	Chimie nucléaire.
LAGARRIGUE	T	Physique des hautes énergies.
JULLIEN	T	Chimie structurale organique.
ARNULF	T	Optique.
ROUAULT	T	Diffraction électronique.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
MAZET	T	Mécanique générale.
DAVID	T	Chimie agrégation.
GUÉRIN	T	Chimie des gaz et des combustibles.
LESIEUR	T	Mathématiques M.P.C. et algèbre.
KOURGANOFF	T	Astronomie.
ARNOULT	T	Physique électronique.
KAHANE	T	Mathématiques.
BROCHARD	T	Physique propédeutique.
ROIZEN (Mme)	T	Physique C.P.E.M.
BERTEIN	T	Électronique.
MALGRANGE	T	Mathématiques.
CORABŒUF	T	Physiologie animale.
FRIEDEL	T	Physique des solides.
CHEVAUGEON	T	Cryptogamie.
MEYER	T	Physique théorique et atomique.
LEHMANN	T	Accélérateur linéaire.
CHABBAL	T	Physique propédeutique.
DELCROIX	T	Physique des plasmas.
CERF	T	Mathématiques.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique.
SCHLEFFER	T	Microbiologie.
DE GENNES	T	Physique des solides.
MARTY (Mme)		Physique propédeutique.
GOURDIN		Physique théorique.
PEREZ Y JORBA		Physique propédeutique.
GORENFLOT		Biologie végétale S.P.C.N.
RIOU		Physique nucléaire.
BROUSSE		Géologie S.P.C.N.
LIORET		Physiologie végétale.
CLAUSER		Chimie biologique.
JANCOVICI		Physique atomique.
LURCAT		Physique propédeutique.
LE BERRE		Entomologie.
LAVOREL		Biophysique.
PERIO		Physique propédeutique.
FETIZON		Stéréochimie.
CHEMLA		Chimie des isotopes.
MAZIÈRES		Chimie S.P.C.N.
VILKAS		Chimie C.P.E.M.
BLANDIN		Physique des solides.
BRUN		Génétique.
MERCOUROFF		Physique agrégation.
ANDRÉ		Microscopie électronique.
CHEVALLIER		Physiologie animale.
MARCOU (Mlle)		Biologie cellulaire C.P.E.M.
BOURDU		Physiologie végétale.
BERKALOFF		Biologie animale C.P.E.M.
LEFORT (Mlle)		Biologie cellulaire C.P.E.M.
LAMBERT (Mme)		Physique C.P.E.M.
BIZOT		Physique M.P.C.
GUIRAUD		Mécanique.
LABOUESSE		Chimie S.P.C.N.

PRÉDICTION D'UNE TRAJECTOIRE À PARTIR DE MESURES ANTÉRIEURES BRUITÉES ET ÉCHANTILLONNÉES

PAR

E. DEFFONTAINES

LICENCIÉ ÈS SCIENCES PHYSIQUES - DIPLÔMÉ D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
PROFESSEUR À L'INSTITUT SUPÉRIEUR D'ÉLECTRONIQUE DU NORD

Résumé. — *L'étude des lois d'interpolation et d'extrapolation des mobiles dont les positions sont connues de façon discrète seulement est assez classique grâce au développement des radars civils et militaires incorporés dans les systèmes d'exploitation.*

Nous supposons que le temps entre l'acquisition de deux informations peut varier de façon aléatoire (non-détection et mouvement de la cible). La détection est entachée d'une erreur à cause du bruit d'origine radioélectrique.

Il s'agit de déterminer le correcteur optimal du dispositif d'extrapolation.

Si le pointé attendu ne tombe pas dans la « fenêtre » prévue, c'est qu'il y a eu, depuis le pointé précédent, évolution de la trajectoire du mobile (accélération transversale ou longitudinale). C'est à partir de la probabilité d'évolution a posteriori *que l'extrapolateur est déterminé. Les dimensions de la fenêtre sont également déterminées à chaque pointé.*

Enfin, dans le cas où le mobile est guidé à partir du sol, on peut — connaissant les ordres qui lui sont envoyés et qui déterminent sa trajectoire — utiliser sans modification importante le correcteur prévu pour un mouvement rectiligne et uniforme.

PRÉLIMINAIRES

1. LE PROBLÈME DE LA DÉTECTION.

Il s'agit de découvrir, de déterminer la position (distance, azimut, site) et d'identifier des objets situés dans une certaine portion de l'espace. A l'aide d'un radar, par exemple, on pourra détecter les objets susceptibles de réfléchir le rayonnement électromagnétique (avions, missiles, navires, gerbes d'eau...). Le principe, très simple, est le même que celui de l'écho acoustique utilisé par le Sonar pour la détection des sous-marins.

Pour voir la cible, le détecteur doit l'éclairer pendant un temps suffisamment long, ce qui, associé aux raisons d'ordre mécanique, limite pratiquement la vitesse de rotation de l'antenne de 6 à 30 tours par minute. Les informations reçues de chaque objet sont « échantillonnées » et pourront, entre autres méthodes, être analysées à l'aide de la transformée en Z. Par suite des fluctuations de la réception, la cible n'est pas nécessairement vue à chaque tour d'antenne : de temps à autre, un « manque » d'information peut se produire.

D'autre part, les mesures sont « bruitées ». La probabilité d'observer un écart donné suit la loi de Gauss; ses caractéristiques dépendent du radar utilisé et des conditions particulières à l'instant de la mesure; l'amplitude de l'onde reçue peut fournir des indications sur la qualité de la mesure. Les déterminations de la distance et des angles (azimut et site) relevant de procédés différents, les erreurs sur ces données sont indépendantes. La mesure de site est en général assez grossière et ne sert qu'à la distinction de cibles situées dans la même direction et à la même distance.

Enfin, les objectifs poursuivis peuvent effectuer des manœuvres de diversion, et les dispositifs de calcul associés doivent s'adapter à ce caractère aléatoire de leur entrée.

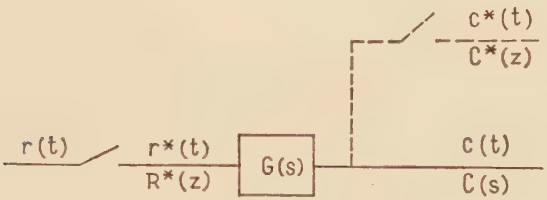
Pour plus amples descriptions de ces différents problèmes, nous renvoyons le lecteur aux références [4, 35].

2. RAPPELS SUR LES SYSTÈMES À DONNÉES ÉCHANTILLONNÉES

Les équations générales expriment les relations entre les valeurs d'entrée et de sortie à divers instants de mesure.

Si la période d'échantillonnage est constante, on peut utiliser la transformée en Z : c'est la transformée de Laplace du signal échantillonné qui s'exprime uniquement en fonction de $z = exp\ Ts$.

Le schéma suivant résume les notations :



L'expression

$$G^*(z) = \frac{C^*(z)}{R^*(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots\ldots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots + b_p z^{-p}}$$

traduit que :

$$c(n\mathrm{T}) = a_0 r(n\mathrm{T}) + a_1 r(n-1)\mathrm{T} + \ldots\ldots\ldots + a_m r(n-m)\mathrm{T} - b_1 c(n-1)\mathrm{T} - \ldots\ldots\ldots - b_p c(n-p)\mathrm{T}.$$

Le lecteur peut se rapporter aux références [9, 13, 14, 27, 30].

Notre utilisation (chapitre I) de la transformée en Z est une application de l'étude de M. Thellier [33] parue dans cette revue en 1961.

3. RAPPELS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

1° On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X la quantité $p(x)$ telle que :

$$p(x)dx = \text{Probabilité } [x \leqslant X \leqslant x + dx].$$

2° Espérance mathématique ou moyenne :

$$E(X) = \int xp(x)\,dx.$$

C'est le point moyen d'un grand nombre de mesures de X.

3° Écart moyen quadratique σ ou écart-type :

$$\sigma^2 = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

Si la moyenne est nulle, σ^2 se confond avec l'espérance mathématique du carré : $\sigma^2 = E(X^2)$.

σ traduit la dispersion des mesures.

4° Cas de deux variables aléatoires X et Y.

On peut définir :

$p(x)dx$ = Probabilité $[x \leqslant X \leqslant x + dx$, indépendamment de Y$]$,

et de même $p(y)dy$;

$p(x,y)dx\,dy$ = Probabilité $[x \leqslant X \leqslant x + dx,\ y \leqslant Y \leqslant y + dy]$;

$p(x|Y)dx$ = Probabilité $[x \leqslant X \leqslant x + dx$ pour $y = Y]$,

et de même $p(y|X)dy$.

On a la relation : $p(x,y) = p(x)\,p(y|X) = p(y)\,p(x|Y)$.

5° Corrélation entre deux variables aléatoires.

On peut chercher l'espérance mathématique du produit XY :

$$E(XY) = \iint xy\,p(x,y)\,dx\,dy.$$

Si x et y sont à valeur moyenne nulle, E(XY) qui est la covariance, représente la corrélation entre X et Y.

Si X et Y sont indépendants, E(XY) = 0.

6° Une variable aléatoire de valeur moyenne nulle est gaussienne si :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp - \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

Dans ce cas, σ est tel que 66 % des mesures se trouvent entre $-\sigma$ et $+\sigma$ et 99 % entre -3σ et $+3\sigma$.

7° Si l'on a deux variables aléatoires gaussiennes, les lieux des points d'équiprobabilité $p(x, y) = Cte$ sont des ellipses, rapportées à leurs axes si X et Y sont indépendants.

8° Distribution de Poisson : Il s'agit d'événements qui se reproduisent au cours du temps à des instants désordonnés; il y a en moyenne ν événements par unité de temps, chaque instant étant équiprobable. La probabilité de ne pas avoir d'événement pendant un temps T est : $p(O, T) = \exp - \nu T$.

9° On dit qu'une variable aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques ne varient pas au cours du temps : en particulier, σ reste constant.

10° Par l'utilisation de la transformée de Fourier, un signal aléatoire peut être caractérisé par un spectre continu de fréquences :

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - j\omega t\,.\,x(t)dt.$$

On consultera avec profit : *Propriétés statistiques du bruit de fond*, A. Blanc-Lapierre et B. Picinbono, Masson, 1961.

INTRODUCTION

Un mobile, avion par exemple, se déplace dans l'espace où un dispositif de détection est capable de le repérer.

Nous connaissons donc ses coordonnées à des instants discrets; le temps qui sépare deux mesures dépend de la vitesse d'exploration du détecteur : il sera constant en première approximation, mais, par suite d'une certaine probabilité de non-détection, nous serons amenés à considérer une période d'échantillonnage variant de façon aléatoire.

Aux informations fournies par le détecteur se superpose un bruit dont nous n'analyserons pas les diverses causes [4, 8, 35]. Il peut être considéré comme un bruit blanc dans la bande de fréquences intéressant le problème; ceci revient à dire que les écarts avec les positions réelles à deux instants différents sont indépendants; on caractérise ce bruit par son e.m.q. σ (e.m.q. : écart moyen quadratique). Nous n'imposons pas la stationarité, mais nous supposons connue l'évolution de l'e.m.q. au cours du temps.

Par suite de la nature échantillonnée des informations, la route de l'objectif nous apparaît uniquement comme une série de points discontinus, séparés par des distances pouvant être assez grandes; par ailleurs, la position actuelle est toujours en avant du dernier point matérialisé sur la trajectoire. Il en résulte des erreurs dans le tracé de la route du mobile, et une grande imprécision sur la connaissance de sa position actuelle. Enfin, si plusieurs pistes se trouvent dans la même région, le détecteur attribuera difficilement l'information à l'une d'entre elles, s'il n'a pas déterminé à l'avance la position que devra occuper le mobile lors de la détection suivante. Pour pallier à ces inconvénients, il est nécessaire de rendre visible la position actuelle en l'extrapolant à partir des échantillons de position obtenus antérieurement. En fait, nous nous contenterons de calculer la position à l'instant de la détection suivante.

Les Américains désignent un tel système par « Track-while-scan system » que l'on peut approximativement traduire par « dispositif de prédiction de trajectoire ».

La nature du correcteur dépendra du spectre de la trajectoire. En réalité, celui-ci est assez mal défini; les données que nous possédons concernent uniquement les possibilités limites d'évolution par rapport à une trajectoire rectiligne uniforme, à savoir : accélération longitudinale toujours faible, accélération transverse importante.

Dans une première démarche, nous reprenons les deux méthodes classiques concernant uniquement la projection du mouvement du mobile suivant un axe :

L'une utilise l'optimisation au sens de WIENER-HOPF dans le domaine Z. La trajectoire rectiligne subit, à des instants aléatoires, soit des échelons de vitesse, soit des échelons d'accélération, d'amplitude constante; leur durée moyenne τ est assez mal définie, mais grande par rapport à la période d'échantillonnage;

, L'autre postule une trajectoire rectiligne uniforme ou uniformément accélérée, et recherche, par la méthode des moindres carrés, la droite ou la parabole optimale passant par tous les points connus; les coefficients du correcteur seront fonction du nombre de mesures effectuées.

Mais, dès que la trajectoire n'est plus rectiligne, le passé cesse d'être significatif; le fait de devoir redonner aux coefficients leur valeur de départ conduit à une erreur importante. Le problème consiste donc à déterminer, à partir de l'écart mesuré, s'il y a eu bifurcation ou non, et dans quelle mesure on doit abandonner complètement les informations antérieures. Pour cela, nous avons défini en probabilité la forme de la trajectoire, et nous pondérons les coefficients du correcteur à partir de la probabilité *a posteriori* de bifurcation. Plusieurs méthodes sont possibles; des études expérimentales nous ont permis de choisir la plus satisfaisante et de l'adapter aux problèmes pratiques qui nous étaient soumis.

CHAPITRE I

CORRECTEUR OPTIMAL SUIVANT LA THÉORIE DE L'OPTIMISATION DE WIENER ÉTENDUE AU DOMAINE Z

§ 1.1. Schéma général. Notations

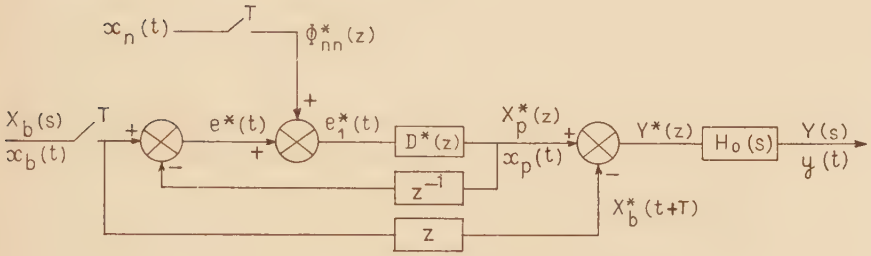


FIG. 1.1. — Schéma général du système étudié

T : période d'échantillonnage;
$x_b(t)$: position du but en fonction du temps;
$X_b(s)$: transformée de Laplace de $x_b(t)$;
$X^*_b(z)$: transformée en Z de $x^*_b(t)$;
$x_n(t)$: expression du bruit en fonction du temps;
$x^*_p(t)$: sortie désirée représentant à l'instant nT la position que le but devrait avoir à l'instant $(n + 1)$ T; c'est la position prédite;

$X^*_p(z)$: transformée en Z de $x^*_p(t)$;
$e^*(t) = x_b(n\mathrm{T}) - x_p[(n-1)\mathrm{T}]$: terme d'erreur de l'asservissement;
$e^*_1(t)$: même terme entaché du bruit;
$\Phi^*_{nn}(z)$: densité spectrale du bruit dans le domaine Z;
$\Phi^*_{bb}(z)$: densité spectrale du signal d'entrée dans le domaine Z;
$\Phi^*_{vv}(z)$: densité spectrale du signal plus bruit dans le domaine Z;
$H_0(s) = \dfrac{1 - e^{-Ts}}{s}$: circuit bloqueur d'ordre zéro;
$y(n\mathrm{T})$: erreur de l'asservissement à l'instant $(n + 1)$T;
$D^*(z)$: fonction de transfert en Z du compensateur;
$D^*_s(z)$: fonction de transfert en Z du compensateur réduit.

Les astérisques indiquent : soit qu'il s'agit d'une fonction échantillonnée et qu'on s'intéresse à son expression en Z; soit qu'il s'agit d'une fonction qui peut être continue mais dont on ne considère que les valeurs aux instants d'échantillonnage. Dans le premier cas, l'astérisque est en indice de lettres majuscules; dans le second cas, il l'est de lettres minuscules.

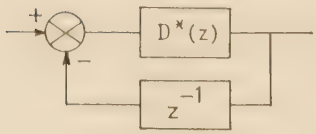
§ 1.2. Expression générale du correcteur en fonction des spectres du signal et du bruit [9-13-27-30-31]

Nous supposerons que le signal et le bruit ne sont pas corrélés et nous nous proposons de minimiser la valeur efficace de l'erreur $\sqrt{y^2(t)}$, ce qui reviendra à minimiser $\overline{y^2(t)}$.

Nous pouvons calculer séparément la part due au bruit et la part due au signal :

$$\overline{y^2(t)} = \overline{y_n^2(t)} + \overline{y_s^2(t)}$$

Nous simplifierons d'abord le schéma fonctionnel :



se transforme en :

avec :

$$D_s^*(z) = \frac{D^*(z)}{1 + z^{-1} D^*(z)}$$

1.2.1. Calcul de $\overline{y_n^2(t)}$ [10, 29, 32, 33].

La formule de Sklansky permet de l'exprimer par une intégrale dans le domaine Z :

$$\overline{y_n^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \oint \Phi_{nn}^*(z) \cdot D_s^*(z) \cdot D_s^*(z^{-1}) \cdot Z[H_0(s) \cdot H_0(-s)] \frac{dz}{z}.$$

Or :

$$Z[H_0(s) \cdot H_0(-s)] = Z\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1 - e^{Ts}}{-s}\right) = -(1 - z^{-1})(1 - z) \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = T$$

donc :

$$\overline{y_n^2(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{nn}^*(z) \cdot D_s^*(z) \cdot D_s^*(z^{-1}) \cdot \frac{dz}{z}.$$

1.2.2. Calcul de $\overline{y_s^2(t)}$.

La transformée de Laplace de $y_s(t)$ est :

$$\begin{aligned} Y_s(s) &= X_b^*(e^{Ts}) \cdot e^{Ts} \cdot H_0(s) - X_b^*(e^{Ts}) \cdot D_s^*(e^{Ts}) \cdot H_0(s) \\ &= X_b^*(e^{Ts}) \cdot H_0(s) \cdot [e^{Ts} - D_s^*(e^{Ts})] \end{aligned}$$

Formons :

$$Y_s(s) \cdot Y_s(-s) = X_b^*(e^{Ts}) \cdot X_b^*(e^{-Ts}) \cdot H_0(s) \cdot H_0(-s) \cdot [1 - e^{Ts} D_s^*(e^{-Ts}) - e^{-Ts} D_s^*(e^{Ts}) + D_s^*(e^{Ts}) D_s^*(e^{-Ts})].$$

$\overline{y_s^2(t)}$ est donné par la formule de Sklansky :

$$\overline{y_s^2(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{vv}^*(z) [1 - z \cdot D_s^*(z^{-1}) - z^{-1} \cdot D_s^*(z) + D_s^*(z^{-1})] \frac{dz}{z}.$$

1.2.3. Minimisation de $\overline{y^2(t)} = F(z)$.

Posons $D_s^*(z) = D_{sm}^*(z) + \mu\, d(z)$.
Pour que $D_{sm}^*(z)$ corresponde à un minimum de F, il faut que :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \{F[D_{sm}^*(z) + \mu d(z)]\} = 0$$

soit encore, puisque F est de la forme $A + B\mu$, que le coefficient du terme en μ soit nul, ce qui donne :

$$\oint \Phi_{nn}^*(z) [D_{sm}^*(z) d(z^{-1}) + D_{sm}^*(z^{-1}) d(z)] \frac{dz}{z}$$
$$+ \oint \{\Phi_{nv}^*(z) [D_{sm}^*(z) d(z^{-1}) + D_{sm}^*(z^{-1}) d(z)] - \Phi_{bb}^*(z) [z \cdot d(z^{-1}) + z^{-1} \cdot d(z)]\} \frac{dz}{z} = 0$$

En posant $\Phi_{vv}^*(z) = \Phi_{bb}^*(z) + \Phi_{nn}^*(z)$, on obtient :

$$\oint d(z^{-1}) [\Phi_{vv}^*(z) \cdot D_{sm}^*(z) - \Phi_{bb}^*(z) \cdot z] \frac{dz}{z}$$
$$+ \oint d(z) [\Phi_{vv}^*(z) \cdot D_{sm}^*(z^{-1}) - \Phi_{bb}^*(z) \cdot z^{-1}] \frac{dz}{z} = 0.$$

Le contour d'intégration est le cercle unité du plan z, mais il n'est pas défini si l'on doit, dans l'intégrale de contour, prendre les pôles à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle unité. Dans l'expression ci-dessus, nous pouvons donc considérer que la première intégrale concerne les pôles à l'intérieur du cercle unité et l'autre les pôles à l'extérieur. Comme on passe de l'une à l'autre par une inversion de centre 0, il suffit d'annuler la première intégrale pour que l'équation soit vérifiée.

Soit $\Phi_{vv}^{*+}(z)$ la partie de $\Phi_{vv}^*(z)$ qui a tous ses pôles et zéros à l'intérieur du cercle unité.

On a $\Phi_{vv}^{*-}(z) = \Phi_{vv}^*(z) / \Phi_{vv}^{*+}(z)$, et la première intégrale devient :

$$\oint d(z^{-1}) \cdot \Phi_{vv}^{*-}(z) \left[\Phi_{vv}^{*+}(z) \cdot D_{sm}^*(z) - \frac{\Phi_{bb}^*(z) \cdot z}{\Phi_{vv}^{*-}(z)}\right] \frac{dz}{z}.$$

Soit $\left[\frac{\Phi^*_{bb}(z)}{\Phi^{*-}_{vv}(z)}\right]_-$ la partie de la décomposition en fractions rationnelles de $\frac{\Phi^*_{bb}(z)}{\Phi^{*-}_{vv}(z)}$ qui comprend le polynôme et les pôles à l'extérieur du cercle unité.

$$\oint d(z^{-1})\Phi^{*-}_{vv}(z)\left[\frac{\Phi^*_{bb}(z)}{\Phi^{*-}_{vv}(z)}\right]_- dz = 0$$

car elle a tous ses pôles à l'extérieur du cercle unité.

Il reste :

$$\oint d(z^{-1}).\Phi^{*-}_{vv}(z).\left\{\frac{\Phi^{*+}_{vv}(z)\cdot D^*_{sm}(z)}{z} - \left[\frac{\Phi^*_{bb}(z)}{\Phi^{*-}_{vv}(z)}\right]_+\right\} dz,$$

qui s'annule pour :

$$\boxed{D^*_{sm}(z) = \frac{z\left[\frac{\Phi^*_{bb}(z)}{\Phi^{*-}_{vv}(z)}\right]_+}{\Phi^{*+}_{vv}(z)}}$$

$D^*_{sm}(z)$ est la solution de notre problème.

§ 1.3. **Cas où l'entrée évolue par échelons de vitesse**

1.3.1. Spectre d'entrée.

1.3.1.1. *Bruit pseudo-blanc* [32, 33]. — $\Phi^*_{nn}(z) = \frac{k^2}{T^2} = \frac{\sigma^2}{T}$ où σ est la valeur efficace du bruit.

Nous prendrons les valeurs de σ comprises entre 300 mètres et 1 000 mètres.

1.3.1.2. *Spectre du signal* [7, 32, 33].

$$\Phi_{bb}(s) = \frac{2\beta v^2}{s^2(\beta^2 - s^2)}$$

v : valeur efficace de l'échelon, $v \sim 300$ m/s;

β : sa fréquence d'apparition;

τ : sa durée moyenne telle que $\beta = \frac{2}{\tau}$, $\tau > 10$ secondes.

D'après Lefèvre [16], dès que τ est supérieur à 10 secondes, l'influence de la variation de β est quasi nulle; nous adoptons donc pour β^2 la valeur zéro en gardant à β sa valeur au numérateur.

Dans ces conditions, $\Phi_{bb}(s) = \frac{2\beta v^2}{s^4} = \frac{a^2}{s^4}$, dont la transformée en Z est :

$$\Phi^*_{bb}(z) = \frac{1}{T} Z\left(\frac{a^2}{s^4}\right) = \frac{a^2 T^2}{6}\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

1.3.1.3. *Spectre du signal plus bruit.*

$$\Phi^*_{vv}(z) = \Phi^*_{nn}(z) + \Phi^*_{bb}(z) = \frac{k^2}{T^2} \cdot \frac{A(z)}{(z-1)^4},$$

avec

$$A(z) = 1 + z^4 - (z^3 + z)(4 - \lambda) + z^2(6 + 4\lambda) \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{a^2T^4}{6k^2} = \frac{a^2T^3}{6\sigma^2},$$

(λ : rapport des spectres d'amplitude du signal et du bruit).

1.3.2. Expression du correcteur.

Nous devons d'abord décomposer $\Phi^*_{vv}(z)$ en $\Phi^*_{vv}(z) . \Phi^{*+}_{vv}(z)$.

Nous cherchons des racines de la forme $m\, e^{\pm j\varphi}$ et $\frac{1}{m}\, e^{\pm j\varphi}$ par identification avec $(z^2 - 2m\, z \cos\varphi + m^2)\left(z^2 - \frac{2}{m}\, z \cos\varphi + \frac{1}{m^2}\right)$ et nous devons ensuite décomposer en fractions rationnelles la quantité :

$$\frac{\Phi^*_{bb}(z)}{\Phi^*_{vv}(z)} = \frac{\lambda z(z^2 + 1 + 4z)}{\left(z^2 - \frac{2}{m}\, z \cos\varphi + \frac{1}{m^2}\right)(z-1)^2}$$

Ceci nous donne :

$$D^*_{sm}(z) = \frac{K_1 z(z - H)}{z^2 - 2m\, z \cos\varphi + m^2},$$

(K_1 et H : constantes introduites par les calculs numériques) ou encore :

$$D^*(z) = \frac{K_1 z(z - H)}{z^2 - (2m \cos\varphi + K_1)z + m^2 + K_1 H}.$$

On montre facilement [7] que $D^*(z)$ admet un pôle double pour $z = 1$, et, pour pouvoir comparer avec les résultats présentés dans la suite, nous écrirons $D^*(z)$ sous la forme :

$$D^*(z) = \frac{z[(\alpha + \beta)z - \alpha]}{(z-1)^2}.$$

α et β représenteront dans la suite les facteurs de correction, α sur la position, β sur la vitesse.

1.3.3. Évaluation de $\overline{y^2(t)}$.

1.3.3.1. *Terme dû au bruit.*

$$\overline{y^2_n(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi^*_{nn}(z) . D^*_s(z) . D^*_s(z^{-1}) . \frac{dz}{z}.$$

L'intégrale trouvée peut se résoudre :

— soit à l'aide des tables construites pour le domaine Z [14];

— soit à l'aide de celles construites pour le domaine v [25] après avoir effectué la transformation $z = \dfrac{1+v}{1-v}$ [17, 18].

$$\frac{\overline{y_n^2(t)}}{\sigma^2} = \frac{2\beta + \alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)}.$$

1.3.3.2. *Terme dû au signal.*

$$\overline{y_s^2(t)} = \frac{T}{2\pi j}\oint \Phi_{bb}^*(z) \cdot [z - D_s^*(z)] \cdot [z^{-1} - D_s^*(z^{-1})] \cdot \frac{dz}{z},$$

et, par la même méthode que précédemment :

$$\frac{\overline{y_s^2(t)}}{\sigma^2} = 2\lambda \cdot \frac{6 - 3\alpha - \beta}{\alpha\beta(4 - 2\alpha - \beta)}.$$

1.3.4. Résultats numériques.

Nous avons effectué les calculs pour plusieurs valeurs de λ à l'aide d'une machine à calculer CAB 500 (voir tableaux 1.1 et 1.2, figures 1.2 et 1.3). Les valeurs de τ correspondantes ont été calculées en prenant $\sigma = 1$ kilomètre, $v = 300$ m/s, $T = 8$ secondes.

TABLEAU 1·1

COEFFICIENTS DU CORRECTEUR EN FONCTION DE λ

POUR UNE ENTRÉE ÉVOLUANT PAR ÉCHELONS DE VITESSE

λ	τ (secondes)	α	β
0,1	300	0,687322	0,438335
0,3	100	0,805391	0,591858
0,375	80	0,822767	0,631487
0,5	60	0,844112	0,683861
0,75	40	0,871943	0,759117
1	30	0,889942	0,812619
1,5	20	0,912671	0,886542
2	13	0,926860	0,936860
10	3	0,977884	1,151862

TABLEAU 1.2

ERREURS EN FONCTION DE λ
POUR UNE ENTRÉE ÉVOLUANT PAR ÉCHELONS DE VITESSE

λ	$\overline{y_n^2(t)}/\sigma^2$	$\overline{y_s^2(t)}/\sigma^2$	$\overline{y^2(t)}/\sigma^2$
0,1	1,41217	1,07858	2,49075
0,3	2,04320	2,09531	4,13851
0,375	2,21247	2,42980	4,64227
0,5	2,45245	2,96237	5,41482
0,75	2,83514	3,97386	6,80900
1	3,13942	4,94667	8,08609
1,5	3,61353	6,83751	10,45104
2	3,97872	8,69409	12,67281
10	6,12233	38,09256	44,21489

Nous donnons également (voir figure 1.4) les courbes de réponse à un échelon de vitesse pour diverses valeurs de λ.

Si le mobile évolue à accélération constante, il y aura de plus une erreur de traînage d'autant plus importante que α et β seront plus faibles.

1.3.5. Conclusion.

Pour ce critère d'optimisation, nous constatons que le système est d'autant moins bon que les évolutions prévues sont plus fréquentes. Ceci est logique : il est plus facile de prédire une trajectoire présentant moins d'évolutions.

Nous remarquons que plus le couple (α, β) est faible, plus l'erreur due au bruit est faible et par contre plus la réponse transitoire à un échelon de vitesse est longue.

Notre critère d'optimisation nous conduit à un couple déterminé (α, β) correspondant au minimum de l'erreur globale.

Nous aurions pu prendre d'autres critères :

— minimiser l'erreur due au bruit pour une réponse à l'échelon inférieure à une certaine durée;

— minimiser l'erreur due à un échelon de vitesse pour un niveau de bruit déterminé; Benedict et Bordner [1, 31] ont montré qu'il fallait prendre $\beta = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$; le couple ($\alpha$, β) est alors choisi en fonction du bruit accepté (voir figure 1.2).

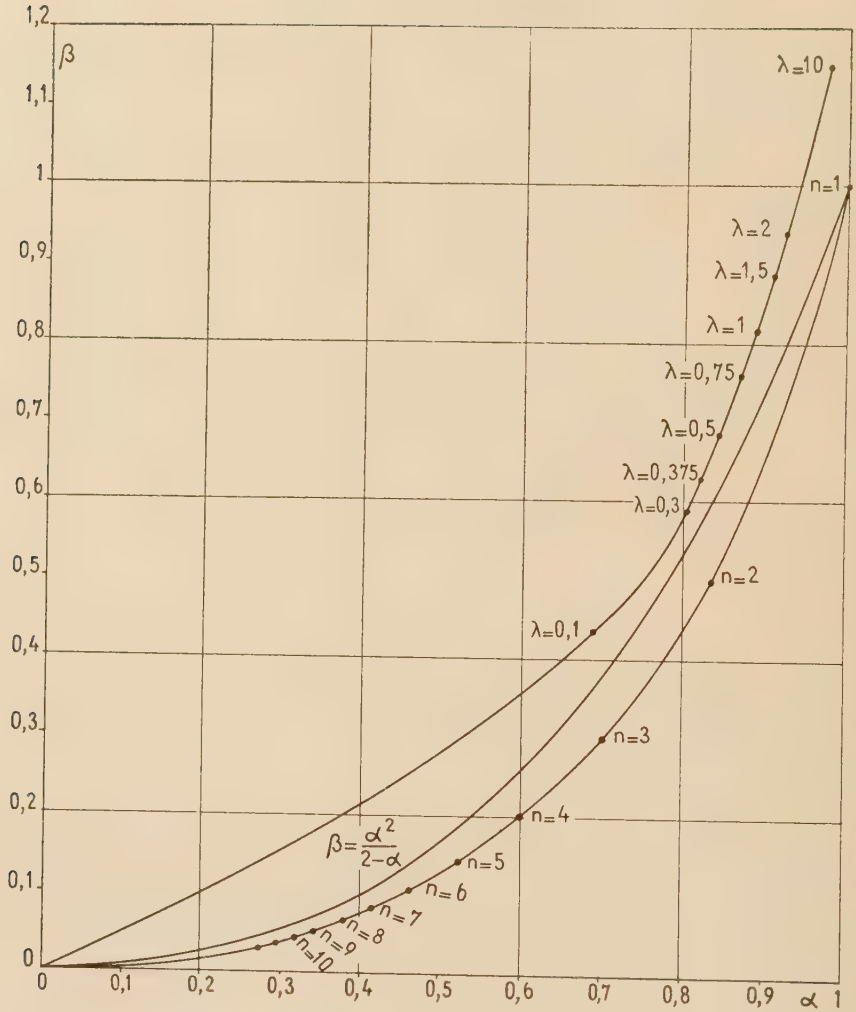


FIG. 1.2. — Coefficients α et β en fonction de λ

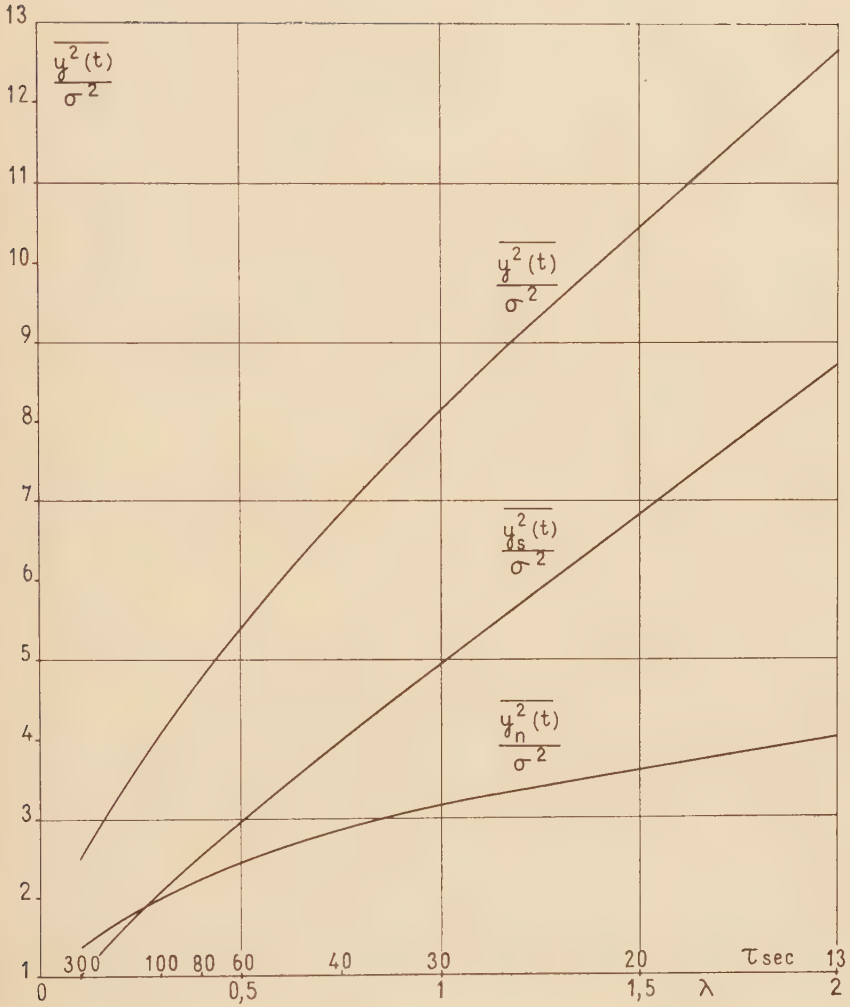


FIG. 1.3. — Erreurs du système en fonction de λ pour une entrée évoluant par échelons de vitesse

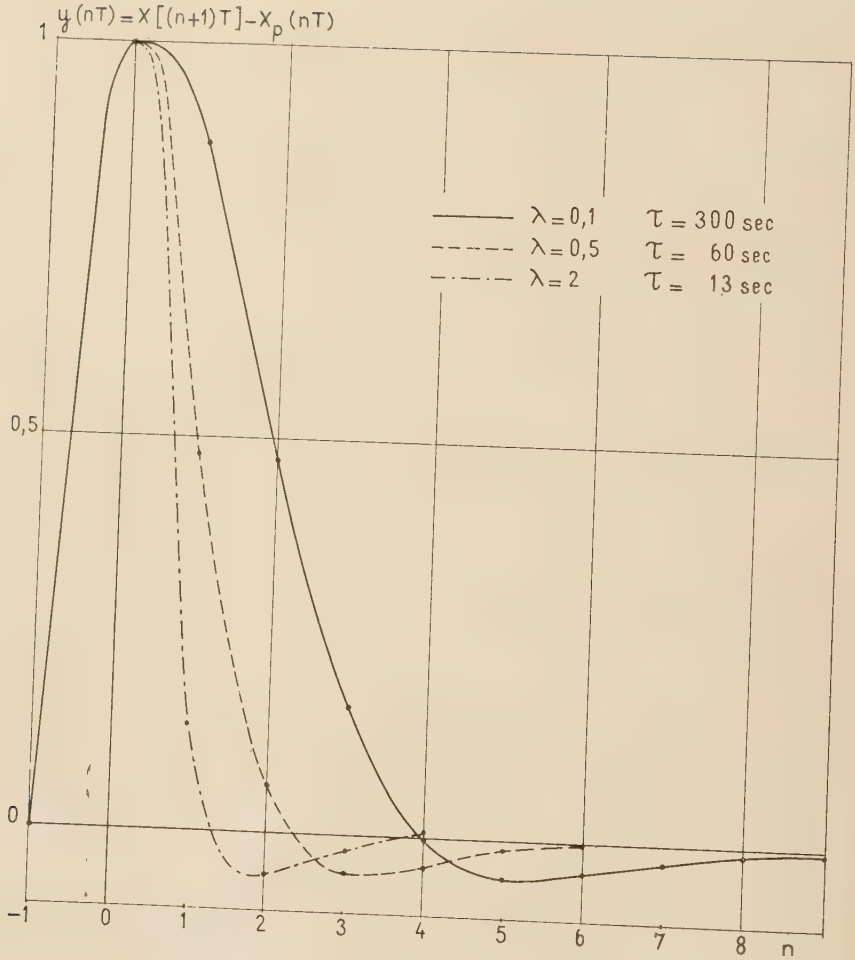


FIG. 1.4. — Correcteur à pôle double
Erreurs pour un échelon de vitesse unité

§ 1.4. Cas où l'entrée évolue par échelons d'accélération

1.4.1. Spectre d'entrée.

Il faut changer l'expression de $\Phi_{bb}(s)$.

$$\Phi_{bb}(s) = \frac{2\beta\gamma^2}{s^4(\xi^2 - s^2)}$$

γ : valeur efficace de l'échelon d'accélération, $\gamma \nu 10$ m/s^2;
β : sa fréquence d'apparition;
τ : sa durée moyenne telle que $\beta = \frac{2}{\tau}$, $\tau > 10$ secondes.

Comme précédemment, on peut écrire :

$$\Phi_{bb}(s) \simeq \frac{2\beta\gamma^2}{s^6} = \frac{a^2}{s^6},$$

$$\Phi^*_{bb}(z) = -\frac{a^2T^4}{5!} \cdot \frac{1 + z^4 + 26(z^3 + z) + 66z^2}{(z-1)^6},$$

$$\Phi^*_{vv}(z) = \frac{k^2}{T^2} \cdot \frac{A(z)}{(z-1)^6}$$

avec :

$$A(z) = 1 + z^6 - (6 + \lambda)(z^5 + z) + (15 - 26\lambda)(z^4 + z^2) - (20 + 66\lambda)z^3$$

où

$$\lambda = \frac{a^2T^6}{5!k^2} = \frac{a^2T^5}{5!\sigma^2}.$$

1.4.2. Expression du correcteur.

Nous savons que les racines de $A(z)$ sont de la forme p, $\frac{1}{p}$, $m e^{\pm j\varphi}$, $\frac{1}{m} e^{\pm j\varphi}$. Nous cherchons donc d'abord une racine réelle de $A(z)$, puis par le même procédé que précédemment m et φ.

Les calculs conduisent à un correcteur

$$D^r_{sm}(z) = \frac{K_1 z(z^2 - H_1 z + H_2)}{(z-1)^3}.$$

On montre facilement [7] que $D^*(z)$ admet un pôle triple pour $z = 1$ et, pour pouvoir comparer aux résultats présentés dans la suite, nous écrirons $D^*(z)$ sous la forme :

$$D^*(z) = \frac{z\left[\left(\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2}\right)z^2 - \left(2\alpha + \beta - \frac{\gamma}{2}\right)z + \alpha\right]}{(z-1)^3}.$$

Remarque. — Le système est à stabilité conditionnelle.

En effet, l'équation caractéristique du système est :

$$1 + \frac{K_1 z(z^2 - H_1 z + H_2)}{(z-1)^3} = 0;$$

pour $K_1 = 0$, nous avons un pôle triple en $z = 1$;
pour K_1 [illegible], nous avons deux zéros imaginaires de module inférieur à 1;
le lieu des racines est celui de la figure 1.5.

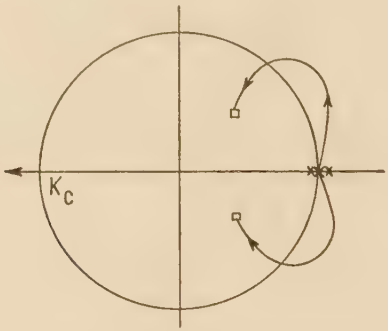


Fig. 1.5. — Lieu des racines

1.4.3. Résultats numériques.

Nous avons calculé, pour diverses valeurs de λ :
— les valeurs de α, β et γ (voir tableau 1.3, figure 1.6);

TABLEAU 1.3

COEFFICIENTS DU CORRECTEUR EN FONCTION DE λ
POUR UNE ENTRÉE ÉVOLUANT PAR ÉCHELONS D'ACCÉLÉRATION

λ	τ (secondes)	α	β	γ
1	0,1	0,988116	1,536234	2,408430
0,1	1	0,951480	1,205009	1,526090
0,01	10	0,872764	0,825874	0,781512
0,0055	20	0,845277	0,734989	0,639094
0,00364	30	0,824757	0,675430	0,553146
0,00273	40	0,809961	0,635756	0,499014
0,00218	50	0,798088	0,605950	0,460074
0,00182	60	0,788185	0,582277	0,430176
0,00136	80	0,772009	0,545736	0,385770
0,001	100	0,754492	0,508888	0,343232
0,0001	1 000	0,616032	0,289220	0,135790

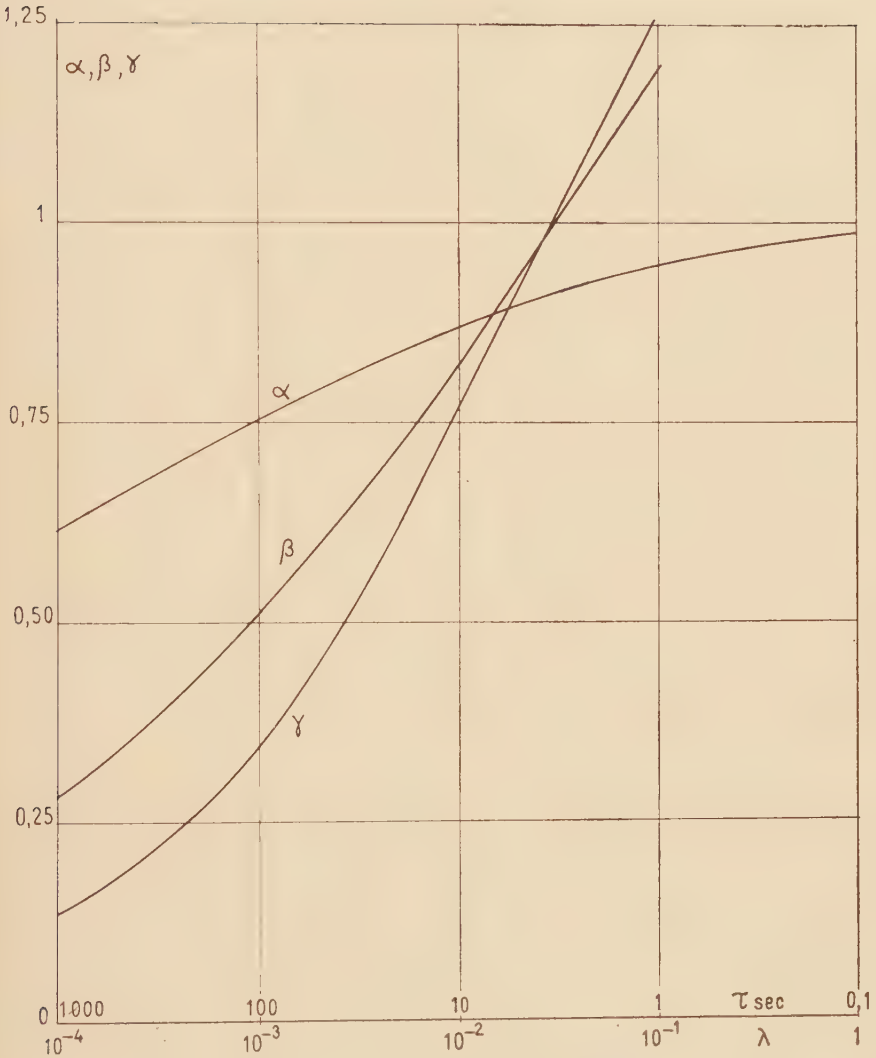


FIG. 1.6. — Coefficients α, β et γ en fonction de λ

— les erreurs dues au bruit et au signal (voir figure 1.7, tableau 1.4)

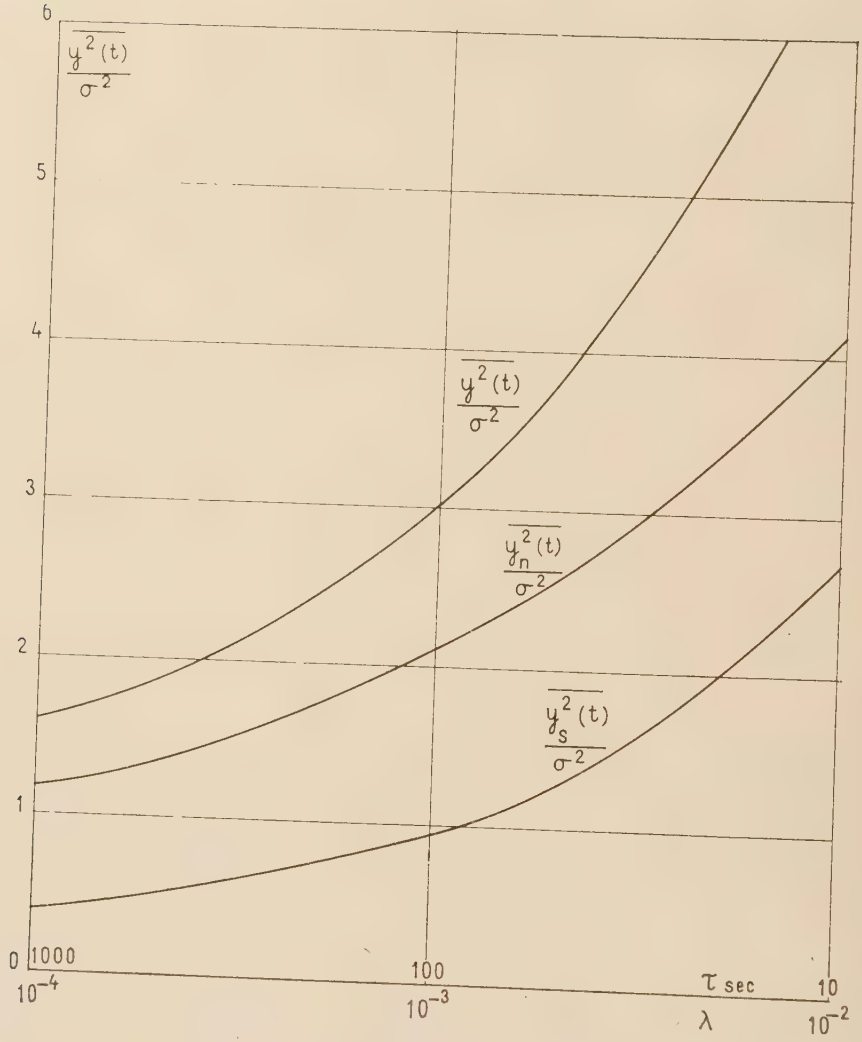


FIG. 1.7. — Erreurs du système en fonction de λ pour une entrée évoluant par échelons d'accélération

TABLEAU 1.4

ERREURS EN FONCTION DE λ
POUR UNE ENTRÉE ÉVOLUANT PAR ÉCHELONS D'ACCÉLÉRATION

λ	$\overline{y_n^2(t)}/\sigma^2$	$\overline{y_s^2(t)}/\sigma^2$	$\overline{y^2(t)}/\sigma^2$
1	21,917629	61,226520	83,144149
0,1	9,226019	10,384224	19,610243
0,01	4,158880	2,700390	6,859270
0,00364	3,051035	1,657574	4,708609
0,00273	2,805846	1,456342	4,262188
0,00218	2,632035	1,320645	3,952680
0,001	2,119990	0,953690	3,073680
0,0001	1,188822	0,415328	1,604150

— la réponse du système à un échelon de vitesse (voir figure 1.8) et à un échelon d'accélération (voir figure 1.9).

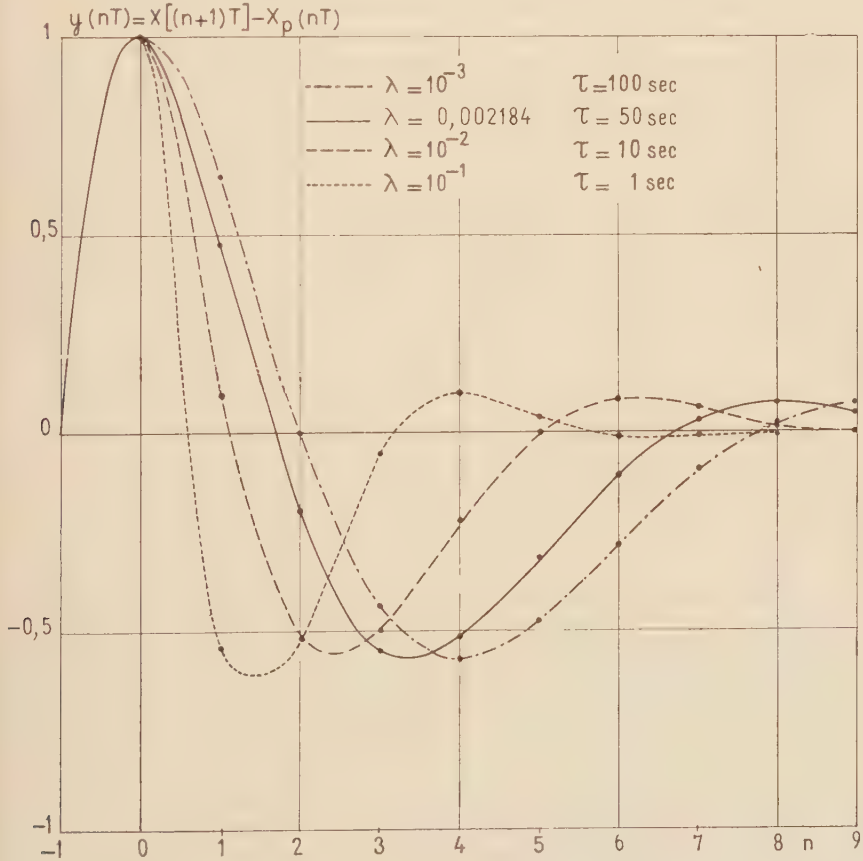


FIG. 1.8. — Correcteur à pôle triple. Erreurs pour un échelon de vitesse unité

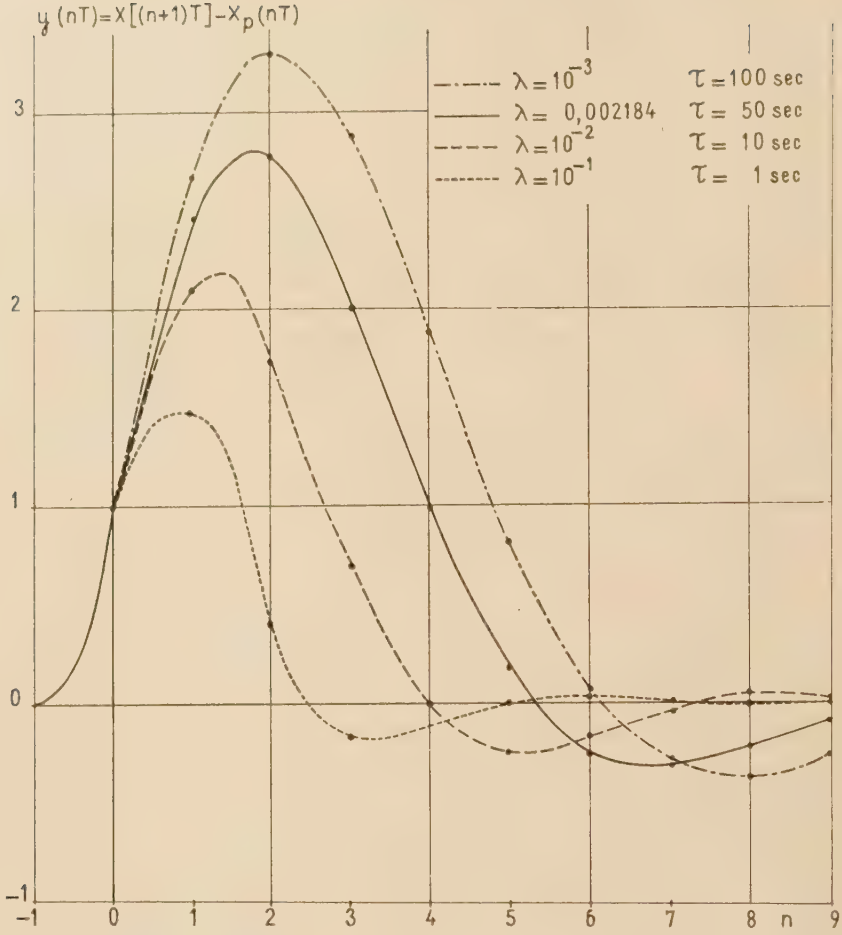


Fig. 1.9. — Correcteur à pôle triple
Erreurs pour un échelon d'accélération unité

1.4.4. Conclusion.

Le système répond d'autant plus vite que les paramètres (α, β, γ) sont plus grands, mais le bruit augmente considérablement. D'où la nécessité d'un compromis entre le niveau de bruit toléré et la réponse à un échelon.

Les réponses sont notablement plus longues que pour le système à pôle double ($z = 1$); par contre, nous suivons maintenant une évolution à accélération constante sans erreur de traînage.

Les courbes d'erreurs montrent que le système n'est guère intéressant pour des échelons d'accélération se produisant à une cadence supérieure à un toutes les 40 secondes.

CHAPITRE II

UTILISATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS POUR DES TRAJECTOIRES DÉCRITES À VITESSE CONSTANTE OU À ACCÉLÉRATION CONSTANTE

§ 2.0. **Introduction**

L'utilisation de la transformée en Z suppose une période d'échantillonnage constante; en particulier, le cas de manques aléatoires ne pourra être traité. D'autre part, à cause du mouvement la période ne sera pas rigoureusement constante, et il faudrait introduire un bruit blanc supplémentaire [2,3] pour tenir compte des fluctuations aléatoires de période.

La nécessité de réaction rapide pour la présence éventuelle d'échelons de courte durée augmente considérablement la valeur efficace de l'erreur due au bruit. Il semble plus intéressant de considérer des trajectoires à vitesse constante ou accélération constante de durée assez longue et d'augmenter progressivement la précision, quitte à revenir fortement en arrière lorsqu'il y a évolution.

Nous traiterons ici uniquement le cas de la trajectoire rectiligne décrite à vitesse constante ou à accélération constante.

§ 2.1. **Entrée évoluant à vitesse constante**

2.1.1. Principe de base.

Soient $X_0, X_1, \ldots\ldots X_n$ les $n+1$ mesures bruitées de l'abscisse de l'entrée effectuées aux instants $t_0, t_1, \ldots\ldots t_n$; nous cherchons à déterminer sa position la plus probable à l'instant t_{n+1}; cette abscisse étant une fonction linéaire du temps, nous cherchons la droite qui minimise la somme des carrés des écarts.

Cette droite [24] passe par le point moyen des points $(X_j, t_j), j = 0, 1 \ldots n$:

$$X_{moy} = \frac{\sum_{j=0}^{n} X_j}{n+1}, \qquad t_{moy} = \frac{\sum_{j=0}^{n} t_j}{n+1};$$

elle a pour coefficient angulaire :

$$b = \frac{\sum_{j=0}^{n} X_j t_j - X_{moy} \sum_{j=0}^{n} t_j}{\sum_{j=0}^{n} t_j^2 - t_{moy} \sum_{j=0}^{n} t_j};$$

son équation est :

$$(X - X_{moy}) = b\,(t - t_{moy}).$$

Nous pouvons donc, à chaque nouvelle mesure, calculer le point moyen et la pente de la droite, puis en déduire la position la plus probable à n'importe quel instant futur; il faut, bien entendu, garder en mémoire toutes les données de l'entrée.

Dans le cas particulier où $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $t_2 = 2T$, ... $t_n = nT$, nous aurons

$$t_{moy} = \frac{nT}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sum_{j=0}^{n} (j - n\,2)\,X_j}{\frac{nT}{12}(n+1)(n+2)};$$

la position prédite $X_{p,n}$ à l'instant nT pour l'instant $(n-1)T$ sera

$$X_{p,n} = \sum_{j=0}^{n} \left[-\frac{2}{n+1} + \frac{6j}{n(n+1)} \right] X_j;$$

et le carré de l'écart quadratique moyen sera

$$F_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n(n+1)};$$

dès que l'on a effectué 6 mesures, le carré de l'e.m.q. devient inférieur à 1, et le système est alors nettement meilleur que le correcteur en Z.

2.1.2. Formules de récurrence.

Pour éviter de garder en mémoire tous les X_j, nous allons essayer de déterminer la droite optimale par son point $X_{c,n}$ et sa vitesse $X'_{c,n}$ à l'instant t_n.

Pour ceci, nous cherchons à minimiser l'expression [19, 20, 15] :

$$R_n = \sum_{j=0}^{n} [X_j - X_{c,n} + (n-j)\,T\,X'_{c,n}]^2\,w_j,$$

w_j étant un facteur de pondération qui peut faire tenir compte de la non-stationarité du bruit.

En minimisant cette expression et celle de $R_{n\ 1}$ par rapport à $X_{c,n}$, $X'_{c,n}$, $X_{c,n-1}$, $X'_{c,n-1}$, on peut mettre le résultat sous la forme :

$$X_{c,n} = X_{p,n-1} + \alpha_n (X_n - X_{p,n-1}), \tag{1}$$

$$X'_{c,n} = X'_{c,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n} (X_n - X_{p,n-1}), \tag{2}$$

$$X_{p,n-1} = X_{c,n-1} + T_n X'_{c,n-1}, \tag{3}$$

$T_n = t_n - t_{n-1}$ représentant l'intervalle de temps entre deux mesures.

Pour $w_j = 1$ et $T_n = T$, on trouve

$$\alpha_n = \frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)}, \qquad \beta_n = \frac{6}{n(n+1)(n+2)},$$

et la même expression pour F_{n+1} qu'au paragraphe 2.1.1.

Les formules ainsi établies permettent de déterminer facilement la position prédite à partir des dernières position et vitesse corrigées et de la dernière mesure.

Si le bruit est stationnaire et la période d'échantillonnage constante, on peut calculer à l'avance tous les paramètres α_n et β_n à utiliser.

2.1.3. Comparaison avec le correcteur dans le plan Z.

Si nous choisissons α_n et β_n constants et des intervalles de temps égaux entre les mesures, les formules de récurrence peuvent s'écrire :

$$X_c(z) = z^{-1} X_p(z) + \alpha E(z),$$

$$X'_c(z) = z^{-1} X'_c(z) + \frac{\beta}{T} E(z),$$

$$X_p(z) = X_c(z) + T X'_c(z),$$

avec

$$E(z) = X_c(z) - z^{-1} X_p(z).$$

En éliminant $X'_c(z)$ et $X_c(z)$ entre les équations :

$$\frac{X_p(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{z[(\alpha+\beta)z - \alpha]}{(z-1)^2};$$

nous constatons que c'est le même schéma fonctionnel qu'au chapitre premier.

Pour passer de l'un à l'autre, il faut donc changer les coefficients α et β à chaque mesure; et l'élément de retour z^{-1} devient un retard dépendant de l'intervalle de temps $t_n - t_{n-1}$. On peut d'ailleurs schématiser le correcteur en Z de manière à sortir X_p, X_c et X'_c (voir figure 2.1).

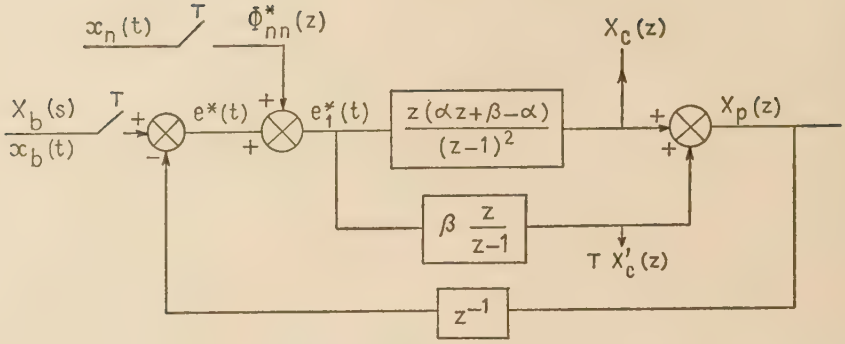


Fig. 2.1. — Schéma fonctionnel fournissant la position et la vitesse corrigées

2.1.4. Méthode de calcul des coefficients α_n et β_n [23, 12].

Nous cherchions précédemment à minimiser la somme des carrés des écarts des positions X_n avec la trajectoire optimale. Cette fois, nous minimiserons la valeur efficace instantanée de l'écart de la position prédite avec la position exacte $\sqrt{\sigma^2(X_{p,n})}$.

En fait, plus simplement, nous minimiserons successivement :

— le carré de la valeur efficace instantanée de l'écart de la position corrigée avec la position exacte $\sigma^2(X_{c,n})$;

— le carré de la valeur efficace instantanée de l'écart de la vitesse corrigée avec la vitesse exacte $\sigma^2(X'_{c,n})$.

Nous vérifierons ensuite que les conditions trouvées minimisent également $\sigma^2(X_{p,n})$.

2.1.4.1. *Hypothèse sur le bruit d'entrée.* — Le bruit d'entrée est pseudo-blanc, mesures successives indépendantes.

La valeur efficace instantanée $\sigma^2(X_n)$ peut varier au cours du temps et nous écrirons : $\sigma^2(X_n) = a\,.\,\sigma^2(X_{n-1})$.

Le coefficient a est :

— égal à 1 si le bruit est stationnaire;

— différent de 1 dans les autres cas; on le détermine alors en fonction du mode de mesure ou à partir des mesures effectuées; le mode de détection peut préciser la qualité de la mesure qu'il a faite; la valeur efficace de l'entrée peut être fonction de la position mesurée.

2.1.4.2. *Notations.* — Nous poserons :

$$R_n = \frac{\sigma^2(X_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad F_n = \frac{\sigma^2(X_{p,n-1})}{\sigma^2(X_{n-1})} = a\,\frac{\sigma^2(X_{p,n-1})}{\sigma^2(X_n)},$$

$$G_n = \frac{\sigma^2(X'_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad C_n = \frac{\mathrm{Cov}\,(X'_{c,n}X_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}$$

qui représente la corrélation entre les bruits sur la position corrigée et la vitesse corrigée (Cov = Covariance).

2.1.4.3. *Minimisation de* $\sigma^2(X_{c,n})$ *ou plus simplement de* R_n. — Pour la partie exacte des X_n, $X_{c,n}$, $X_{p,n}$, $X'_{c,n}$, les formules (1), (2) et (3) établies en 2.1.2 sont exactement vérifiées; après simplification, nous pouvons donc considérer les X_n, $X_{c,n}$, $X_{p,n}$, $X'_{c,n}$ comme les écarts par rapport aux valeurs exactes.

D'autre part, $X_{p,n\ 1}$ ne dépend que de $X_{n\ 1}$, X_{n-2}, ..., et non de X_n; $X_{p,n-1}$ et X_n ne sont donc pas corrélés et le terme Cov $(X_{p,n\ 1} X_n)$ est nul.

Nous pouvons alors écrire :

$$\sigma^2(X_{c,n}) = \sigma^2(X_{p,n-1})(1 - \alpha_n)^2 + \alpha_n^2 \sigma^2(X_n)$$

$$R_n = (1 - \alpha_n)^2 \cdot \frac{F_n}{a} + \alpha_n^2.$$

Pour que R_n soit minimal, il faut que

$$\frac{\partial R_n}{\partial \alpha_n} = 0 = 2(1 - \alpha_n)\frac{F_n}{a} + 2\alpha_n,$$

soit :

$$\alpha_{n\text{opt}} = \frac{F_n}{a + F_n} \qquad \text{et} \qquad R_{n\text{opt}} = \alpha_n.$$

2.1.4.4. *Minimisation de* $\sigma^2(X'_{c,n})$ *ou plus simplement de* G_n. — Élevons la relation (2) au carré :

$$X'^2_{c,n} = X'^2_{c,n-1} + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (X_n^2 + X_{p,n-1}^2 - 2X_n X_{p,n-1})$$

$$+ 2\frac{\beta_n}{T_n} X'_{c,n-1} X_n - 2\frac{\beta_n}{T_n} X'_{c,n-1} X_{p,n-1}.$$

Passons aux valeurs efficaces instantanées et divisons par $\sigma^2(X_n)$, en remarquant que X_n n'est pas corrélé avec $X_{p,n-1}$ et $X'_{c,n\ 1}$ et que, d'autre part :

$$X'_{c,n-1} X'_{p,n-1} = X_{c,n-1} X'_{c,n-1} + T_n X'^2_{c,n-1}.$$

On obtient :

$$G_n = \frac{G_{n\ 1}}{a} + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 \left(1 + \frac{F_n}{a}\right) - 2\frac{\beta_n}{T_n}\left(\frac{C_{n\ 1}}{a} + T_n \frac{G_{n-1}}{a}\right),$$

qui sera minimal pour :

$$\frac{\partial G_n}{\partial \beta_n} = 0, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\beta_{n\text{opt}}}{T_n} = \frac{C_{n-1} + T_n G_{n-1}}{a + F_n}.$$

Cherchons l'expression correspondante de G_n :

$$G_n = \frac{G_{n-1}}{a} - \frac{(C_{n-1} + T_n G_{n-1})^2}{a(a + F_n)};$$

pour calculer F_n, on peut effectuer sur la relation (3) les mêmes transformations que précédemment, ce qui donne :

$$\sigma^2(X_{p,n-1}) = \sigma^2(X_{c,n-1}) + \sigma^2(X'_{c,n-1})\,T_n + 2\,T_n\,\mathrm{Cov}\,(X_{c,n-1}X'_{c,n-1})$$

soit :

$$F_n = R_{n-1} + G_{n-1}T_n^2 + 2\,C_{n-1}T_n.$$

Finalement :

$$G_{n\,\mathrm{opt}} = \frac{G_{n-1}(a + R_{n-1}) - C_{n-1}^2}{a\,(a + F_n)}.$$

2.1.4.5. *Vérification de la minimisation de F_{n+1}.* —

$$F_{n+1} = R_n + G_n T_{n+1}^2 + 2\,C_n T_{n+1}.$$

Calculons l'expression de C_n; pour cela, effectuons le produit $X_{c,n}X'_{c,n}$.

$$X_{c,n}X'_{c,n} = [X_{p,n-1}(1 - \alpha_n) + \alpha_n X_n]\left[X'_{c,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1})\right]$$

$$= (1 - \alpha_n)\,X_{p,n-1}X'_{c,n-1} + \alpha_n X_n X'_{c,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(1 - \alpha_n)\,X_n X_{p,n-1}$$

$$+ \frac{\alpha_n\beta_n}{T_n}X_n^2 - \frac{\beta_n}{T_n}(1 - \alpha_n)\,X_{p,n-1}^2 - \frac{\alpha_n\beta_n}{T_n}X_n X_{p,n-1}.$$

En passant aux valeurs efficaces instantanées et en divisant par $\sigma^2(X_n)$:

$$C_n = (1 - \alpha_n)\left(\frac{C_{n-1}}{a} + \frac{G_{n-1}}{a}T_n\right) + \frac{\alpha_n\beta_n}{T_n} - \frac{\beta_n}{T_n}(1 - \alpha_n)\frac{F_n}{a}.$$

Formons :

$$\frac{\partial C_n}{\partial \alpha_n} \text{ et } \frac{\partial C_n}{\partial \beta_n}.$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \alpha_n} = -\left(\frac{C_{n-1}}{a} + \frac{G_{n-1}}{a}T_n\right) + \frac{\beta_n}{T_n}\left(1 + \frac{F_n}{a}\right)$$

s'annule pour :

$$\frac{\beta_{n\,\mathrm{opt}}}{T_n} = \frac{C_{n-1} + G_{n-1}T_n}{a + F_n}.$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \beta_n} = \frac{\alpha_n}{T_n} - \frac{(1 - \alpha_n)\,F_n}{a\,T_n}$$

s'annule pour :

$$\alpha_{n\,\mathrm{opt}} = \frac{F_n}{a + F_n}.$$

Les valeurs de α_n et de β_n trouvées minimisent le terme C_n, et, en conséquence le terme F_{n+1}; mais si l'on forme $\frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n}$ et $\frac{\partial F_n}{\partial \xi_n}$, on obtient une seule et même relation entre α_n et β_n; les valeurs de α_n et de β_n trouvées ne sont donc pas les seules valables. Nous pourrions donner à α_n ou à β_n une valeur arbitraire et en déduire la valeur de l'autre paramètre. Ceci revient à choisir comme trajectoire optimale n'importe quelle droite passant par le point prédit mais ne correspondant en rien avec la trajectoire réelle. Dans la suite, nous prendrons donc comme valeurs optimales de α_n et de β_n les valeurs trouvées plus haut.

Reportons dans l'expression de C_n la valeur $\alpha_n = \frac{F_n}{a + F_n}$, soit encore $1 - \alpha_n = \frac{a}{a + F_n}$; il vient :

$$C_n = \frac{2\beta_n}{T_n}\frac{F_n}{a + F_n} - \frac{2\beta_n}{T_n}\frac{F_n}{a + F_n} + \frac{2a}{a + F_n}\frac{G_{n-1}T_n + C_{n-1}}{a},$$

soit

$$C_{n\,\mathrm{opt}} = \frac{\beta_n}{T_n}.$$

2.1.4.6. *Conclusion.* — Le calcul des valeurs optimales des coefficients α_n et β_n se fera à partir des formules suivantes :

$$F_n = \alpha_{n-1} + G_{n-1}T_n^2 + \frac{2\beta_{n-1}}{T_{n-1}}T_n$$

$$\alpha_n = \frac{F_n}{a + F_n}$$

$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{1}{a + F_n}\left(G_{n-1}T_n + \frac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}}\right)$$

$$G_n = \frac{1}{a(a + F_n)} \cdot \left[a\,G_{n-1} + G_{n-1}\alpha_{n-1} - \left(\frac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}}\right)^2\right].$$

2.1.5. Calcul numérique des coefficients α_n et β_n.

Nous étudierons ici le cas où l'échantillonnage s'effectue à période constante T :

— tout d'abord lorsque le bruit est stationnaire ($a = 1$);

— puis dans des cas de bruit non stationnaire.

2.1.5.1. *Bruit stationnaire.* — Il faut déterminer les premières valeurs α_1, β_1 et G_1 à choisir lorsque deux mesures ont été effectuées. Nous avons alors : $X_{c,1} = X_1$, soit $\alpha = 1$ et $X'_{c,1} = \frac{X_1 - X_0}{T}$, soit $\beta = 1$ (ces valeurs $\alpha = \beta = 1$ correspondent, pour le correcteur dans le domaine Z, à la détermination de la position prédite à partir des deux dernières mesures effectuées).

$$G_1 = \frac{\sigma^2(X'_{c,1})}{\sigma^2(X_1)} = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_0)}{\sigma^2(X_1)} = \frac{2}{T^2} \qquad \text{si } a_1 = 1.$$

Les valeurs de F_n, α_n, β_n et T^2G_n sont données dans le tableau 2.1 (voir figure 1.2).

TABLEAU 2.1

ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES ET DU BRUIT EN FONCTION DE n

n	F_n	α_n	β_n	T^2G_n
1.....		1	1	2
2.....	5,000000	0,833333	0,500000	0,500000
3.....	2,333333	0,700000	0,300000	0,200000
4.....	1,500000	0,600000	0,200000	0,100000
5.....	1,100000	0,523810	0,142857	0,057143
6.....	0,866667	0,464286	0,107143	0,035714
7.....	0,714286	0,416667	0,083333	0,023810
8.....	0,607143	0,377778	0,066667	0,016667
9.....	0,527778	0,345455	0,054545	0,012121
10.....	0,466667	0,318182	0,045455	0,009091
11.....	0,418182	0,294872	0,038462	0,006993
12.....	0,378788	0,274725	0,032967	0,005495
13.....	0,346154	0,257143	0,028571	0,004396
14.....	0,318681	0,241667	0,025000	0,003571
15.....	0,295238	0,227941	0,022059	0,002941
16.....	0,275000	0,215686	0,019608	0,002451
17.....	0,257353	0,204678	0,017544	0,002064
18.....	0,241830	0,194737	0,015789	0,001754
19.....	0,228070	0,185714	0,014286	0,001504
20.....	0,215790	0,177489	0,012987	0,001299
21.....	0,204762	0,169960	0,011858	0,001129
22.....	0,194805	0,163043	0,010870	0,000988
23.....	0,185771	0,156667	0,010000	0,000870
24.....	0,177536	0,150769	0,009231	0,000769
25.....	0,170000	0,145299	0,008547	0,000684
26.....	0,163077	0,140212	0,007937	0,000611
27.....	0,156695	0,135468	0,007389	0,000547
28.....	0,150794	0,131035	0,006897	0,000493
29.....	0,145320	0,126882	0,006452	0,000445

Nous constatons que F_n décroît régulièrement et tend vers zéro pour un nombre de mesures infini: la mesure de la vitesse devient vite très précise.

Les valeurs de α_n et de β_n décroissent également : plus on a effectué de mesures, moins la nouvelle mesure doit intervenir.

Nous remarquons enfin que les valeurs de F_n sont les mêmes que celles trouvées par la minimisation de la somme des carrés des écarts avec la trajectoire optimale en 2.1.2; les deux critères d'optimisation conduisent aux mêmes résultats.

2.1.5.2. *Bruit non stationnaire.* — Quand a est légèrement différent de 1, il est logique de tenir davantage compte des mesures pour lesquelles le bruit est plus faible.

Supposons $a = 0{,}9$; entre chaque mesure, le bruit diminue progressivement; les premières valeurs de F_n, α_n, β_n et T^2G_n sont données dans le tableau 2.2;

TABLEAU 2·2

ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES ET DU BRUIT EN FONCTION DE n POUR UN BRUIT DÉCROISSANT ($a = 0{,}9$)

n	F_n	α_n	β_n	T^2G_n
1.....		1	1	2,111111
2.....	5,111111	0,850277	0,517560	0,556582
3.....	2,441979	0,730698	0,321408	0,234825
4.....	1,608339	0,641156	0,221753	0,123864
5.....	1,208566	0,573169	0,163910	0,067813
6.....	0,968802	0,518408	0,123995	0,043422

Supposons $a = 1{,}1$; le bruit augmente (voir tableau 2.3).

TABLEAU 2·3

ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES ET DU BRUIT EN FONCTION DE n POUR UN BRUIT CROISSANT ($a = 1{,}1$)

n	F_n	α_n	β_n	T^2G_n
1.....		1	1	1,909091
2.....	4,909091	0,816944	0,484115	0,455232
3.....	2,240406	0,670698	0,281207	0,173709
4.....	1,406821	0,561197	0,181471	0,082867
5.....	1,007006	0,477932	0,125456	0,049704
6.....	0,778548	0,414441	0,093242	0,030337

Quand le bruit diminue, les valeurs de α_n et β_n décroissent moins rapidement; on tient davantage compte des dernières mesures effectuées qui sont plus précises. C'est le contraire quand le bruit augmente.

2.1.6. Remarques pour l'échantillonnage à période aléatoire.

2.1.6.1. *Mode d'utilisation des formules de récurrence.*

Premier cas. — La position prédite ne nous intéresse que pour la comparer à une mesure effectuée.

Il nous suffit alors de calculer les coefficients α_n et β_n, la position prédite $X_{p,n}$ au moment où l'on effectue la mesure, et d'utiliser pour T_n le temps qui a séparé effectivement les deux mesures.

Second cas. — Il est intéressant de connaître la position prédite pour un instant déterminé dès que la mesure est effectuée, par exemple à chaque période d'échantillonnage à période constante, des manques se produisant de manière aléatoire.

Dans ce cas, on remet à jour les coefficients à chaque période d'échantillonnage :

S'il n'y a pas eu de mesure, α_n, β_n et G_n ne changent pas;

— la première fois :

$$F_n = \alpha_{n-1} + G_{n-1} T_n^2 + \frac{2\,\beta_{n-1}}{T_{n-1}} T_n;$$

— ensuite :

$$F_{n+1} = F_n + 2\,T_{n+1}\left(G_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}}\right) + G_{n-1}(T_n + T_{n+1})^2.$$

S'il y a eu une mesure, α_n, β_n, G_n et F_n sont donnés par les formules de récurrence normales.

2.1.6.2. *Nombre maximal de manques admissible.* — Si l'on augmente le temps entre deux mesures, le bruit sur la position prédite augmente progressivement. On constate que dès que le nombre des manques consécutifs est supérieur au nombre de mesures effectuées moins deux, le bruit sur la position prédite devient de l'ordre de F_2. Naturellement, si une nouvelle mesure est effectuée, l'erreur sur la position prédite diminue fortement : le fait d'effectuer deux mesures très espacées dans le temps permet une bonne précision sur la vitesse. Le niveau de bruit ne peut donc pas constituer un critère valable d'abandon de poursuite.

Par contre, plus le temps où l'on n'a pas effectué de mesure est long, plus la probabilité d'une évolution est grande. Le critère d'abandon devra donc être basé sur la probabilité d'évolution pendant l'absence de mesure.

§ 2.2. **Entrée évoluant à accélération constante**

On pourrait reprendre comme précédemment la recherche de la parabole optimale par la méthode des moindres carrés. Tout cela nous conduirait à définir cette fois la position $X_{c,n}$, la vitesse $X'_{c,n}$ et l'accélération $X''_{c,n}$ corrigées à l'instant de mesure, et à employer les formules de récurrence suivantes :

$$X_{c,n} = X_{p,n-1} + \alpha_n (X_n - X_{p,n-1}) \tag{1}$$

$$X'_{c,n} = X'_{p,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n} (X_n - X_{p,n-1}) \tag{2}$$

$$X''_{c,n} = X''_{c,n-1} + \frac{\gamma_n}{T_n^2} (X_n - X_{p,n-1}) \tag{3}$$

$$X_{p,n} = X_{c,n} + T_{n+1} X'_{c,n} + \frac{T_{n+1}^2}{2} X''_{c,n} \tag{4}$$

$$X'_{p,n} = X'_{c,n} + T_{n+1} X''_{c,n}. \tag{5}$$

2.2.1. Comparaison avec le correcteur dans le plan Z.

Avec $T_n = T$, $\alpha_n = \alpha$, $\beta_n = \beta$, $\gamma_n = \gamma$, (3) donne :

$$X''_c(z) = \frac{\gamma}{T^2} \frac{E(z)}{(1 - z^{-1})}.$$

(2) et (5) donnent :

$$X'_c(z) = \frac{\beta}{T} \frac{E(z)}{(1 - z^{-1})} + \frac{T X''_c(z)\, z^{-1}}{(1 - z^{-1})} = \frac{\beta}{T} \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\gamma}{T} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

(4) et (1) donnent :

$$X_p(z) = \frac{\alpha E(z)}{(1 - z^{-1})} + \frac{T X'_p(z)}{(1 - z^{-1})} + \frac{T^2 X''_p(z)}{2 (1 - z^{-1})}$$

$$X_p(z) = E(z) \left[\frac{\alpha}{(1 - z^{-1})} + \frac{\beta}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{\gamma z^{-1}}{(1 - z^{-1})^3} + \frac{\gamma}{2 (1 - z^{-1})^2} \right],$$

$$\frac{X_p(z)}{E(z)} = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})} + \frac{\beta}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{\gamma (1 + z^{-1})}{2 (1 - z^{-1})^3},$$

$$\frac{X_p(z)}{E(z)} = D_s^*(z) = \frac{z [\alpha + \beta + \gamma/2) z^2 - (2\alpha + \beta - \gamma/2) z + \alpha]}{(z - 1)^3},$$

soit exactement l'expression du correcteur du chapitre premier.

2.2.2. Détermination de α_n, β_n et γ_n.

Les calculs sont de la même forme que dans le cas précédent. Pour simplifier, nous supposerons le bruit stationnaire, c'est-à-dire : $\sigma^2(X_n) = \sigma^2(X_{n-1})$.

Nous poserons :

$$R_n = \frac{\sigma^2(X_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad F_n = \frac{\sigma^2(X_{p,n-1})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad G_n = \frac{\sigma^2(X'_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad H_n = \frac{\sigma^2(X'_{p,n-1})}{\sigma^2(X_n)}$$

$$C_n = \frac{\mathrm{Cov}\,(X_{c,n}\,X'_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad D_n = \frac{\mathrm{Cov}\,(X_{c,n}\,X''_{c,n})}{\sigma^2(X_n)},$$

$$E_n = \frac{\mathrm{Cov}\,(X'_{c,n}\,X''_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}, \qquad J_n = \frac{\sigma^2(X''_{c,n})}{\sigma^2(X_n)}.$$

2.2.2.1. *Minimisation de R_n.* — La relation (1) donne :

$$\sigma^2(X_{c,n}) = \sigma^2(X_{p,n-1})\,(1 - \alpha_n)^2 + \alpha_n^2\sigma^2(X_n).$$

soit : $R_n = (1 - \alpha_n)^2 F_n + \alpha_n^2$.

R_n est minimal pour $\frac{\partial R_n}{\partial \alpha_n} = 0$, soit pour $\alpha_{n\mathrm{opt}} = \frac{F_n}{1 + F_n}$ et $R_{n\mathrm{opt}} = \alpha_n$.

2.2.2.2. *Minimisation de G_n.* — Élevons la relation (2) au carré :

$$X'^2_{c,n} = X'^2_{p,n-1} + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (X_n^2 + X^2_{p,n-1} - 2\,X_n X_{p,n-1}) + 2\frac{\beta_n}{T_n}(X'_{p,n-1}X_n - X'_{p,n-1}X_{p,n-1}).$$

Multiplions la relation (5) par la relation (4) :

$$X'_{p,n-1}X_{p,n-1} = X_{c,n-1}X'_{c,n-1} + T_n X'^2_{c,n-1} + \frac{3}{2}T_n^2 X'_{c,n-1}X''_{c,n-1} + T_n X_{c,n-1}X''_{c,n-1} + \frac{T_n^2}{2}X''^2_{c,n}.$$

Passons aux valeurs efficaces instantanées et divisons par $\sigma^2(X_n)$:

$$G_n = H_n + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2(1 + F_n) - 2\frac{\beta_n}{T_n}\left(C_{n-1} + T_n G_{n-1} + \frac{3}{2}T_n^2 E_{n-1} + T_n D_{n-1} + \frac{T_n^3}{2}J_{n-1}\right).$$

G_n sera minimal pour $\frac{\partial G_n}{\partial \beta_n} = 0$, soit pour :

$$\frac{\beta_{n\mathrm{opt}}}{T_n} = \frac{C_{n-1} + T_n G_{n-1} + \frac{3}{2}T_n^2 E_{n-1} + T_n D_{n-1} + \frac{T_n^3}{2}J_{n-1}}{1 + F_n}$$

on a alors :

$$G_{n\mathrm{opt}} = H_n - \left(\frac{\beta_{n\mathrm{opt}}}{T_n}\right)^2(1 + F_n) = H_n - \frac{\beta^2_{n\mathrm{opt}}}{T_n^2(1 - \alpha_{n\mathrm{opt}})}.$$

2.2.2.3. *Minimisation de J_n.* — Élevons la relation (3) au carré :

$$X''^2_{c,n} = X''^2_{c,n-1} + \left(\frac{\gamma_n}{T_n^2}\right)^2 (X_n^2 + X_{p,n-1}^2 - 2X_n X_{p,n-1}) + 2\frac{\gamma_n}{T_n^2}(X_n X''_{c,n-1} - X''_{c,n-1} X_{p,n-1}).$$

Or :

$$X''_{c,n-1} X_{p,n-1} = X_{c,n-1} X''_{c,n-1} + T_n X'_{c,n-1} X''_{c,n-1} + \frac{T_n^2}{2} X''^2_{c,n-1}.$$

Par conséquent :

$$J_n = J_{n-1} + \left(\frac{\gamma_n}{T_n^2}\right)^2 (1 + F_n) - 2\frac{\gamma_n}{T_n^2}\left(D_{n-1} + T_n E_{n-1} + \frac{T_n^2}{2} J_{n-1}\right).$$

J_n sera minimal pour $\frac{\partial J_n}{\partial \gamma_n} = 0$, soit pour :

$$\frac{\gamma_{n\,\mathrm{opt}}}{T_n^2} = \frac{D_{n-1} + T_n E_{n-1} + \frac{T_n^2}{2} J_{n-1}}{1 + F_n} \quad \text{et} \quad J_{n\,\mathrm{opt}} = J_{n-1} - \frac{\gamma_{n\,\mathrm{opt}}^2}{T_n^4}(1 + F_n).$$

2.2.2.4. *Minimisation de C_n.* — Effectuons le produit $X_{c,n} X'_{c,n}$:

$$X_{c,n} X'_{c,n} = [X_{p,n-1}(1 - \alpha_n) + \alpha_n X_n]\left[X'_{p,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1})\right]$$

$$= X_{p,n-1} X'_{p,n-1}(1 - \alpha_n) + \alpha_n X_n X'_{p,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(1 - \alpha_n)(X_{p,n-1} X_n - X_{p,n-1}^2) + \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}(X_n^2 - X_n X_{p,n-1}),$$

ce qui donne comme précédemment :

$$C_n = (1 - \alpha_n)\left(C_{n-1} + T_n G_{n-1} + \frac{3}{2} T_n^2 E_{n-1} + T_n D_{n-1} + \frac{T_n^3}{2} J_{n-1}\right) - \frac{\beta_n}{T_n}(1 - \alpha_n) F_n + \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}.$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \alpha_n} = -\left(C_{n-1} + T_n G_{n-1} + \frac{3}{2} T_n^2 E_{n-1} + T_n D_{n-1} + \frac{T_n^3}{2} J_{n-1}\right) + \frac{\beta_n}{T_n}(1 + F_n),$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial \beta_n} = -\frac{(1 - \alpha_n)}{T_n} F_n + \frac{\alpha_n}{T_n}.$$

Ces dérivées s'annulent pour $\alpha_n = \alpha_{n\,\mathrm{opt}}$ et $\beta_n = \beta_{n\,\mathrm{opt}}$. Nous en déduisons :

$$C_n = (1 - \alpha_n)\frac{\beta_n}{T_n}(1 + F_n) - \frac{\beta_n}{T_n}(1 - \alpha_n) F_n + \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}, \qquad C_{n\,\mathrm{opt}} = \frac{\beta_{n\,\mathrm{opt}}}{T_n}$$

2.2.2.5. *Minimisation de D_n.* — Évaluons le produit $X_{c,n}X''_{c,n}$:

$$X_{c,n}X''_{c,n} = [X_{p,n-1}(1-\alpha_n) + \alpha_n X_n]\left[X''_{c,n-1} + \frac{\gamma_n}{T_n^2}(X_n - X_{p,n-1})\right]$$

$$= (1-\alpha_n)X_{p,n-1}X''_{c,n-1} + \alpha_n X_n X''_{c,n-1}$$

$$+ \frac{\gamma_n}{T_n^2}(1-\alpha_n)(X_{p,n-1}X_n - X^2_{p,n-1}) + \frac{\alpha_n\gamma_n}{T_n^2}(X_n^2 - X_n X_{p,n-1}),$$

soit :

$$D_n = (1-\alpha_n)\left(D_{n-1} + T_n E_{n-1} + \frac{T_n^2}{2}J_{n-1}\right) - \frac{\gamma_n}{T_n^2}(1-\alpha_n)F_n + \frac{\alpha_n\gamma_n}{T_n}.$$

$$\frac{\partial D_n}{\partial \alpha_n} = -\left(D_{n-1} + T_n E_{n-1} + \frac{T_n^2}{2}J_{n-1}\right) + \frac{\gamma_n}{T_n^2}(1+F_n),$$

$$\frac{\partial D_n}{\partial \gamma_n} = -\frac{(1-\alpha_n)F_n}{T_n^2} + \frac{\alpha_n}{T_n^2}.$$

Ces dérivées s'annulent pour $\alpha_n = \alpha_{n\,\mathrm{opt}}$ et $\gamma_n = \gamma_{n\,\mathrm{opt}}$. Nous en déduisons :

$$D_n = (1-\alpha_n)\frac{\gamma_n}{T_n^2}(1+F_n) - \frac{\gamma_n}{T_n^2}(1-\alpha_n)F_n + \frac{\alpha_n\gamma_n}{T_n^2},$$

$$D_{n\mathrm{opt}} = \frac{\gamma_{n\mathrm{opt}}}{T_n^2}.$$

2.2.2.6. *Minimisation de E_n.* — Évaluons le produit $X'_{c,n}X''_{c,n}$:

$$X'_{c,n}X''_{c,n} = \left[X'_{p,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1})\right]\left[X''_{c,n-1} + \frac{\gamma_n}{T_n^2}(X_n - X_{p,n-1})\right]$$

$$= X'_{p,n-1}X''_{c,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(X_n X''_{c,n-1} - X_{p,n-1}X''_{c,n-1})$$

$$+ \frac{\gamma_n}{T_n^2}(X_n X'_{p,n-1} - X'_{p,n-1}X_{p,n-1})$$

$$+ \frac{\beta_n\gamma_n}{T_n^3}(X_n^2 + X^2_{p,n-1} - 2X_n X_{p,n-1}).$$

Puisque $X'_{p,n-1}X''_{c,n-1} = X'_{c,n-1}X''_{c,n-1} + T_n X''^2_{c,n-1}$, on a :

$$E_n = E_{n-1} + T_n J_{n-1} - \frac{\beta_n}{T_n^3}\gamma_{n\mathrm{opt}}(1+F_n) - \frac{\gamma_n}{T_n^3}\beta_{n\mathrm{opt}}(1+F_n)$$

$$+ \frac{\beta_n\gamma_n}{T_n^3}(1+F_n).$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial \beta_n} = -\frac{\gamma_{n\mathrm{opt}}(1+F_n)}{T_n^3} + \frac{\gamma_n(1+F_n)}{T_n^3}, \qquad \frac{\partial E_n}{\partial \gamma_n} = -\frac{\beta_{n\mathrm{opt}}(1+F_n)}{T_n^3} + \frac{\beta_n(1+F_n)}{T_n^3}$$

Ces dérivées s'annulent pour $\beta_n = \beta_{n\,\mathrm{opt}}$ et $\gamma_n = \gamma_{n\,\mathrm{opt}}$. Nous en déduisons :

$$E_{n\mathrm{opt}} = E_{n-1} + T_n J_{n-1} - \frac{\beta_{n\mathrm{opt}}\gamma_{n\mathrm{opt}}}{T_n^3}(1+F_n).$$

2.2.2.7. *Vérification de la minimisation de* H_{n+1}. — En élevant la relation (5) au carré, nous trouvons immédiatement :

$$H_{n+1} = G_n + T_{n+1}^2 J_n + 2 T_{n+1} E_n.$$

Les valeurs trouvées précédemment pour $\alpha_{n\,\mathrm{opt}}$, $\beta_{n\ \mathrm{opt}}$, et $\gamma_{n\ \mathrm{opt}}$ minimisent G_n, J_n, E_n et donc H_{n+1}. Néanmoins, examinons la question de plus près et évaluons H_{n+1} :

$$\begin{aligned} H_{n+1} = {} & G_{n-1} + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (1 + F_n) - \frac{2\,\beta_n \beta_{n\mathrm{opt}}}{T_n^2} (1 + F_n) \\ & + J_{n-1} T_{n+1}^2 + \gamma_n^2 \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2} (1 + F_n) - 2\,\gamma_n \gamma_{n\mathrm{opt}} \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2} (1 + F_n) \\ & + 2\,E_{n-1} T_{n+1} + 2\,T_n T_{n+1} J_{n-1} \\ & + 2\,(1 + F_n) \frac{T_{n+1}}{T_n} (\beta_n \gamma_n - \beta_n \gamma_{n\mathrm{opt}} - \beta_{n\mathrm{opt}} \gamma_n). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_{n+1}}{\partial \beta_n} = \frac{(1 + F_n)}{T_n^2} \left[2\,\beta_n - 2\,\beta_{n\mathrm{opt}} + 2 \frac{T_{n+1}}{T_n} (\gamma_n - \gamma_{n\mathrm{opt}}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial H_{n+1}}{\partial \gamma_n} = \frac{(1 + F_n)\, T_{n+1}^2}{T_n^4} \left[2\gamma_n - 2\,\gamma_{n\mathrm{opt}} + 2 \frac{T_n}{T_{n+1}} (\beta_n - \beta_{n\mathrm{opt}}) \right] = 0.$$

Ces deux relations se réduisent en une seule, et donc les valeurs $\beta_{n\ \mathrm{opt}}$ et $\gamma_{n\ \mathrm{opt}}$ ne sont pas les seules acceptables, mais les plus logiques.

2.2.2.8. *Vérification de la minimisation de* F_{n+1}. — En élevant la relation (4) au carré, nous trouvons immédiatement :

$$F_{n+1} = R_n + T_{n+1}^2 G_n + \frac{1}{4} T_{n+1}^4 J_n + 2\,T_{n+1} C_n + T_{n+1}^2 D_n + T_{n+1}^3 E_{n-1}.$$

Comme précédemment, nous voyons que les valeurs $\alpha_{n\ \mathrm{opt}}$, $\beta_{n\ \mathrm{opt}}$ et $\gamma_{n\ \mathrm{opt}}$ minimisent F_{n+1} mais ce ne sont pas les seules valeurs possibles, le calcul de $\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \alpha_n}$, $\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \beta_n}$ et $\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \gamma_n}$ conduisant à des relations identiques.

2.2.2.9. *Conclusion.* — Le calcul des valeurs optimales des coefficients α_n, β_n et γ_n se fera à partir des formules de récurrence suivantes :

$$F_n = R_{n-1} + T_n^2 G_{n-1} + \frac{T_n^4}{4} J_{n-1} + 2\,T_n C_{n-1} + T_n^2 D_{n-1} + T_n^3 E_{n-1},$$

que l'on peut écrire différemment si l'on considère que

$$H_n = G_{n-1} + T_n^2 J_{n-1} + 2\,T_n E_{n-1};$$

cela donne :

$$F_n = \frac{H_n T_n^2}{4} + R_{n-1} + \frac{3\,T_n^2 G_{n-1}}{4} + \frac{2\,\beta_{n-1} T_n}{T_{n-1}} + \frac{\gamma_{n-1} T_n^2}{T_{n-1}} + \frac{T_n^3 E_{n-1}}{2},$$

$$\alpha_n = \frac{F_n}{1 + F_n},$$

$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{\dfrac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}} + T_n G_{n-1} + \dfrac{3\,T_n^2 E_{n-1}}{2} + \dfrac{\gamma_{n-1} T_n}{T_{n-1}} + \dfrac{T_n^3 J_{n-1}}{2}}{1 + F_n},$$

$$\frac{\gamma_n}{T^2_{n-1}} = \frac{\dfrac{\gamma_{n-1}}{T^2_{n-1}} + T_n E_{n-1} + \dfrac{T_n^2 J_{n-1}}{2}}{1 + F_n},$$

$$G_n = H_n - \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (1 + F_n),$$

$$J_n = J_{n-1} - \left(\frac{\gamma_n}{T_n^2}\right)^2 (1 + F_n),$$

$$E_n = E_{n-1} + T_n J_{n-1} - \frac{\beta_n \gamma_n}{T_n^3}(1 + F_n).$$

2.2.3. Calcul numérique des coefficients α_n, β_n et γ_n.

2.2.3.1. *Calcul.* — Nous envisageons le cas où l'échantillonnage s'effectue
période constante T.

Lors de la deuxième mesure, nous supposons que l'accélération est null
et nous choisissons : $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$, comme au paragraphe 2.1.5.
Cela donne :

$$X_{c,1} = X_1, \qquad X'_{c,1} = \frac{X_1 - X_0}{T}, \qquad X'_{p,1} = \frac{X_1 - X_0}{T}, \qquad X_{p,1} = 2X_1 - X$$

Lors de la troisième mesure, on peut déterminer la vitesse et l'accélérati
à l'instant de cette troisième mesure. Si X_0, X_1 et X_2 sont les trois premièr
mesures,

$$X_{c,2} = X_2, \quad X'_{c,2} = \frac{1}{T}\left(\frac{3}{2}X_2 - 2X_1 + \frac{X_0}{2}\right), \quad X''_{c,2} = \frac{1}{T^2}(X_2 - 2X_1 + X_0$$

Ces valeurs nous conduisent à : $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$, $\gamma_2 = 1$; on en déduit l
valeurs de G_2, J_2 et E_2 :

$$G_2 = \frac{13}{2\,T^2}, \qquad J_2 = \frac{6}{T^4}, \qquad E_2 = \frac{6}{T^3}.$$

A l'aide des formules de récurrence, nous pouvons calculer les valeu
successives des paramètres.

Le tableau 2.4 et la figure 2.2 donnent les valeurs successives des coefficients α_n, β_n, γ_n et le terme F_n représentant le facteur de bruit sur la position prédite.

TABLEAU 2.4

ÉVOLUTION DES PARAMÈTRES α, β, γ, ET DU BRUIT SUR X_5 EN FONCTION DE n

n	α_n	β_n	γ_n	F_n
1	1	1	0	
2	1	1,5	1	
3	0,950000	1,050000	0,500000	19,000000
4	0,885714	0,771429	0,285714	7,750002
5	0,821429	0,589286	0,178571	4,599999
6	0,761905	0,464286	0,119048	3,200000
7	0,708333	0,375000	0,083333	2,428572
8	0,660606	0,309091	0,060606	1,946430
9	0,618182	0,259091	0,045455	1,619049
10	0,580420	0,220280	0,034965	1,383335
11	0,546704	0,189561	0,027473	1,206062
12	0,516484	0,164836	0,021978	1,068184
13	0,489286	0,144643	0,017857	0,958044
14	0,464706	0,127941	0,014706	0,868133
15	0,442402	0,113971	0,012255	0,793408
16	0,422085	0,102167	0,010320	0,730358
17	0,403509	0,092105	0,008772	0,676472
18	0,386467	0,083459	0,007519	0,629903
19	0,370780	0,075974	0,006494	0,589268
20	0,356296	0,069452	0,005647	0,553509
21	0,342886	0,063735	0,004941	0,521805
22	0,330435	0,058696	0,004348	0,493507
23	0,318846	0,054231	0,003846	0,468098
24	0,308034	0,050257	0,003419	0,445159
25	0,297925	0,046703	0,003053	0,424348
26	0,288451	0,043514	0,002737	0,405385
27	0,279557	0,040640	0,002463	0,388035
28	0,271190	0,038042	0,002225	0,372101
29	0,263307	0,035686	0,002016	0,357417

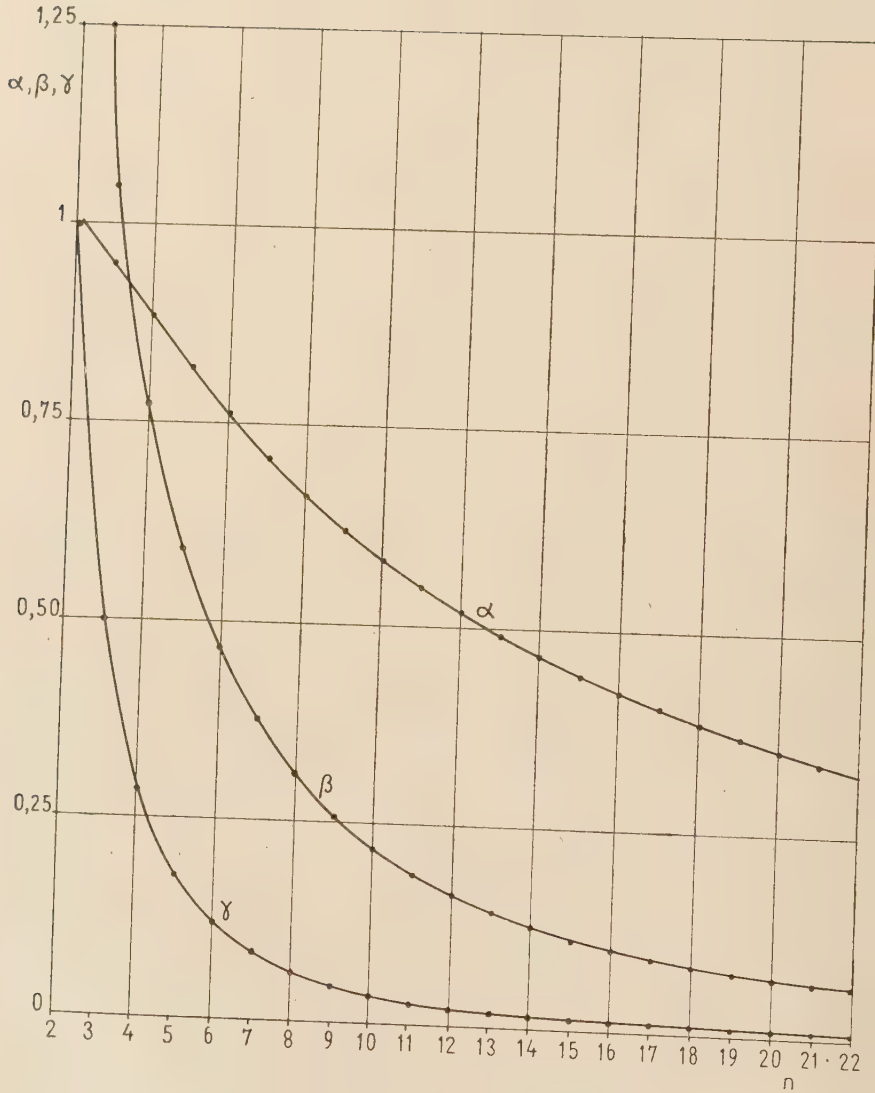


FIG. 2.2. — Evolution des paramètres α, β et γ en fonction de n

Le tableau 2.5 donne les valeurs de G_n, H_n, J_n qui représentent les facteurs de bruit sur la vitesse corrigée, la vitesse prédite et l'accélération corrigée, et celles de E_n : corrélation entre la vitesse corrigée et l'accélération corrigée à l'instant de la mesure.

TABLEAU 2.5

ÉVOLUTION DES BRUITS SUR X'_c, X'_p, X''_c, ET DE LA CORRÉLATION ENTRE X'_c ET X''_c EN FONCTION DE n

n	T^2G_n	T^2H_n	T^4J_n	T^3E_n
2	6.5		6	6
3	2,450003	24,500000	1,000000	1,500000
4	1,242857	6,450003	0,285715	0,571428
5	0,726786	2,671428	0,107143	0,267857
6	0,464286	1,369643	0,047619	0,142857
7	0,315477	0,797620	0,023810	0,083334
8	0,224459	0,505954	0,012987	0,051948
9	0,165531	0,341343	0,007576	0,034091
10	0,125642	0,241289	0,004662	0,023310
11	0,097653	0,176924	0,002997	0,016484
12	0,077423	0,133617	0,001998	0,011988
13	0,062432	0,103397	0,001374	0,008929
14	0,051083	0,081662	0,000970	0,006787
15	0,042332	0,065627	0,000700	0,005252
16	0,035475	0,053537	0,000516	0,004128
17	0,030025	0,044247	0,000387	0,003289
18	0,025638	0,036991	0,000295	0,002654
19	0,022067	0,031240	0,000228	0,002165
20	0,019130	0,026623	0,000178	0,001783
21	0,016693	0,022874	0,000141	0,001482
22	0,014653	0,019798	0,000113	0,001242
23	0,012933	0,017250	0,000091	0,001049
24	0,011472	0,015122	0,000074	0,000892
25	0,010223	0,013330	0,000061	0,000763
26	0,009149	0,011810	0,000051	0,000657
27	0,008221	0,010513	0,000042	0,000568
28	0,007414	0,009400	0,000035	0,000494
29	0,006709	0,008438	0.000030	0,000432

2.2.3.2. *Remarques.* — Les valeurs α_2, β_2 et γ_2 correspondent au cas d correcteur dans le domaine Z qui détermine la position future à partir dc trois dernières mesures, soit :

$$D(z) = \frac{z(3z^2 - 3z + 1)}{(z-1)^3};$$

on a :

$$\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} = 3$$

$$2\alpha + \beta - \frac{\gamma}{2} = 3$$

$$\alpha = 1$$

soit :

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = 1.$$

Ces calculs correspondent à une période T constante; si les intervalle entre les mesures n'étaient pas constants, les valeurs initiales seraient fonctio de T_1 et T_2.

Ces résultats numériques sont identiques à ceux trouvés par l'utilisatio des formules suivantes établies par Levine [19] :

$$\alpha_n = \frac{3(3n^2 + 3n + 2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \qquad \beta_n = \frac{18(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\gamma_n = \frac{60}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$T^2G_n = \frac{12(8n-3)(2n+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}, \qquad T^4J_n = \frac{720}{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

§ 2.3. **Conclusion**

2.3.1. Comparaison des deux systèmes de ce chapitre.

Il ressort de ce chapitre que les résultats numériques sont beaucoup moin favorables pour le système destiné à suivre une accélération constante qu pour le système destiné à suivre une vitesse constante, les niveaux de bru étant beaucoup plus élevés et décroissant moins vite. Cela étant, nous ne garde rons désormais que le système à deux paramètres (α, β), cette attitude s trouvant d'ailleurs justifiée par le fait que les accélérations sont toujour soit de faible durée, soit de faible valeur (auquel cas on peut les négliger san erreur de traînage notable).

2.3.2. Comparaison avec le correcteur en Z.

Si la vitesse ou l'accélération ne restent constantes que pendant des inte valles de temps assez courts, l'erreur sur la prédiction est plus forte à tous le instants que pour le correcteur en Z, et surtout pour le système à accélér tion constante.

Si, au contraire, la vitesse ou l'accélération demeure constante pendar des intervalles de temps assez longs, la précision devient ici beaucoup mei leure; dans ce cas, il nous reste à déterminer le comportement optimal avoir lors d'une bifurcation.

CHAPITRE III

CHOIX DU SYSTÈME D'AXES

§ 3.1. Conditions de poursuite séparée sur chaque axe

Les coordonnées d'entrée étant X_n et Y_n, nous cherchons à montrer que, s'il n'y a pas de corrélation entre les bruits suivant X et suivant Y, on peut chercher séparément les coordonnées prédites $X_{p,n}$ et $Y_{p,n}$.

Par extension des résultats du chapitre précédent, nous choisissons un correcteur de la forme générale suivante :

$$\begin{Bmatrix} X_{c,n} \\ Y_{c,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{p,n-1} \\ Y_{p,n-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n - X_{p,n-1} \\ Y_n - Y_{p,n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X'_{c,n} \\ Y'_{c,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_{c,n-1} \\ Y'_{c,n-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n - X_{p,n-1} \\ Y_n - Y_{p,n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{p,n} \\ Y_{p,n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{c,n} \\ Y_{c,n} \end{Bmatrix} + T_n \begin{Bmatrix} X'_{c,n} \\ Y'_{c,n} \end{Bmatrix}$$

Ces formules sont exactement vérifiées pour une trajectoire rectiligne uniforme non bruitée; donc nous pouvons supposer que chacune des grandeurs X ou Y ne représente que le bruit.

La recherche des valeurs optimales des coefficients α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, dans le cas général, est longue, et conduit à un correcteur difficilement utilisable. Nous démontrerons donc que, si $E(X_n\, Y_n) = 0$, les coefficients γ, β, ζ et η sont nuls.

Pour ceci, supposons que, pour une valeur de n, on ait :

$$E(X_{p,n-1}\, Y_{p,n-1}) = E(X'_{c,n-1}\, Y'_{c,n-1}) = E(X'_{c,n-1}\, Y_{c,n-1}) = E(X_{c,n-1}\, Y'_{c,n-1}) = 0.$$

Cela entraîne :

$$E(X^2_{c,n}) = (1-\alpha)^2 E(X^2_{p,n-1}) + \alpha^2 E(X^2_n) + \beta^2 [E(Y^2_n) + E(Y^2_{p,n-1})],$$

$$E(Y^2_{c,n}) = (1-\delta)^2 E(Y^2_{p,n-1}) + \delta^2 E(Y^2_n) + \gamma^2 [E(X^2_n) + E(X^2_{p,n-1})],$$

$$E(X_{c,n}\, Y_{c,n}) = \alpha\gamma E(X^2_n) + \beta\delta E(Y^2_n) - \gamma(1-\alpha) E(X^2_{p,n-1}) - \beta(1-\delta) E(Y^2_{p,n-1}).$$

Ces trois quantités sont minimales pour $\beta = \gamma = 0$, et, dans ces conditions

$$E(X_{c,n}\ Y_{c,n}) = 0.$$

De même :

$$E(X'^2_{c,n}) = E(X'^2_{c,n-1}) + \varepsilon^2[E(X^2_n) + E(X^2_{p,n-1})] + \zeta^2[E(Y^2_n) + E(Y^2_{p,n-1})] - 2\varepsilon[E(X'^2_{c,n-1}) + E(X'_{c,n-1}\ X_{c,n-1})],$$

$$E(Y'^2_{c,n}) = E(Y'^2_{c,n-1}) + \eta^2[E(X^2_n) + E(X^2_{p,n-1})] + \theta^2[E(Y^2_n) + E(Y^2_{p,n-1})] - 2\eta[E(Y'^2_{c,n-1}) + E(Y'_{c,n-1}\ Y_{c,n-1})].$$

$$E(X'_{c,n}\ Y'_{c,n}) = \varepsilon\eta[E(X^2_n) + E(X^2_{p,n-1})] + \zeta\theta[E(Y^2_n) + E(Y^2_{p,n-1})] - \eta[E(X'^2_{c,n-1}) + E(X'_{c,n-1}\ X_{c,n-1})] - \zeta[E(Y'^2_{c,n-1}) + E(Y'_{c,n-1}\ Y_{c,n-1})].$$

Ces trois quantités sont minimales pour $\eta = \zeta = 0$;

dans ces conditions :

$$E(X'_{c,n}\ Y'_{c,n}) = 0.$$

Dès lors on a aussi :

$$E(X'_{c,n}\ Y_{c,n}) = 0 \qquad \text{et} \qquad E(X_{c,n}\ Y'_{c,n}) = 0.$$

Enfin :

$$E(X_{p,n}\ Y_{p,n}) = E(X_{c,n}\ Y_{c,n}) + T_n^2\, E(X'_{c,n}\ Y'_{c,n}) + T_n E(X'_{c,n}Y_{c,n} + Y'_{c,n}X_{c,n}) = 0.$$

Si l'on envisage le cas $n = 2$, c'est-à-dire celui où l'on a effectué les trois couples de mesures (X_0,Y_0), (X_1,Y_1) et (X_2,Y_2); on a, entre elles, les relations

$$X_{c,1} = X_1, \qquad Y_{c,1} = Y_1;$$

$$X'_{c,1} = \frac{X_1 - X_0}{T_1}, \qquad Y'_{c,1} = \frac{Y_1 - Y_0}{T_1};$$

$$X_{p,1} = 2X_1 - X_0, \qquad Y_{p,1} = 2Y_1 - Y_0;$$

Dès lors :

$$E(X'_{c,1}\ Y_{c,1}) = E(X_{c,1}\ Y'_{c,1}) = E(X_{c,1}\ Y_{c,1}) = E(X_{p,1}\ Y_{p,1}) = 0;$$

tous les termes de corrélation entre X et Y sont nuls; en conséquence, ils seront nuls pour toutes les valeurs de n.

S'il n'y a donc pas de corrélation entre X_n et Y_n, on peut utiliser les résultats du chapitre précédent.

§ 3.2. **Utilisation des coordonnées polaires**

Les systèmes de détection fournissent en général la distance et l'azimut du mobile étudié. Les mesures de ces deux coordonnées sont en général indépendantes; alors que si on les convertit en coordonnées cartésiennes, on obtient une corrélation entre les erreurs suivant X et Y.

En définitive, il semble donc intéressant de suivre le système en coordonnées polaires.

Malheureusement, pour un mouvement rectiligne uniforme, ρ et θ ne sont pas des fonctions linéaires du temps.

Nous pouvons prendre :

$$\rho = \rho_0 + \rho'_0 t + \frac{1}{2}\rho''_0 t^2 + \varepsilon t^3, \qquad \theta = \theta_0 + \theta'_0 t + \frac{1}{2}\theta''_0 t^2 + \varepsilon t^3.$$

Si ρ''_0 et θ''_0 sont faibles, on peut éventuellement les négliger, mais, avec la décroissance de α et β, l'erreur de traînage correspondante va augmenter.

Nous pourrions alors utiliser un correcteur pour un polynôme de degré plus élevé, mais nous avons vu que, dans ce cas, la diminution des erreurs est beaucoup moins rapide.

Si l'on sait calculer ρ'' et θ'' connaissant ρ, ρ', θ, θ', nous pouvons modifier le correcteur de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\rho_{c,n} &= \rho_{p,n-1} + \alpha_n(\rho_n - \rho_{p,n-1}),\\
\rho'_{c,n} &= \rho'_{p,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(\rho_n - \rho_{p,n-1}),\\
\rho'_{p,n} &= \rho'_{c,n} + T_{n+1}\rho'',\\
\rho_{p,n} &= \rho_{c,n} + T_{n+1}\rho'_{c,n} + \frac{1}{2}T^2_{n+1}\rho'';\\
\theta_{c,n} &= \theta_{p,n-1} + \gamma_n(\theta_n - \theta_{p,n-1}),\\
\theta'_{c,n} &= \theta'_{p,n-1} + \frac{\delta_n}{T_n}(\theta_n - \theta_{p,n-1}),\\
\theta'_{p,n} &= \theta'_{c,n} + T_{n+1}\theta'',\\
\theta_{p,n} &= \theta_{c,n} + T_{n+1}\theta'_{c,n} + \frac{1}{2}T^2_{n+1}\theta''.
\end{aligned}$$

La détermination de α_n, β_n, γ_n et δ_n, ne pourra plus, en toute rigueur, être obtenue par la minimisation des e.m.q. sur $\rho_{c,n}$, $\rho'_{c,n}$, $\theta_{c,n}$ et $\theta'_{c,n}$ mais par la minimisation des e.m.q. sur $\rho_{p,n}$, $\rho'_{p,n}$, $\theta_{p,n}$ et $\theta'_{p,n}$.

Toutefois, si l'erreur sur ces termes due à l'imprécision sur la connaissance de ρ'' et de θ'' est négligeable, on pourra effectuer les mêmes calculs que précédemment en majorant éventuellement F_n et G_n de l'erreur due aux termes correctifs.

3.2.1. Calcul de ρ'' et de θ''.

Les composantes de l'accélération en coordonnées polaires sont :

— suivant le rayon vecteur : $\rho'' - \rho\theta'^2$;

— suivant la normale au rayon vecteur : $2\theta'\rho' + \rho\theta''$.

Puisque la vitesse est supposée constante, ces composantes doivent être nulles, ce qui entraîne :

$$\rho'' = \rho\theta'^2 \qquad \text{et} \qquad \theta'' = -\frac{2\rho'\theta'}{\rho}.$$

3.2.2. Calcul des erreurs sur ρ'' et θ''.

On néglige les corrélations entre ρ'' et $\rho'_{c,n}$, ρ'' et $\rho_{c,n}$, θ'' et $\theta'_{c,n}$, θ'' et $\theta_{c,n}$.

Calculons $d\rho''$:

$$d\rho'' = \theta'^2_{c,n} d\rho_{c,n} + 2\rho_{c,n}\theta'_{c,n} d\theta'_{c,n},$$

$$\mathrm{E}[(d\rho'')^2] = \theta'^4_{c,n}\mathrm{E}[(d\rho_{c,n})^2] + 4\rho^2_{c,n}\theta'^2_{c,n}\mathrm{E}[(d\theta'_{c,n})^2];$$

$$\text{or} \quad \frac{\mathrm{E}[(d\rho_{c,n})^2]}{\sigma^2_\rho} = \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{E}[(d\theta'_{c,n})^2]}{\sigma^2_\theta} = \mathrm{G}_{\theta,n};$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{\mathrm{E}[(d\rho'')^2]}{\sigma^2_\rho} = \theta'^4_{c,n}\alpha_n + 4\rho^2_{c,n}\theta'^2_{c,n}\mathrm{G}_{\theta,n}\frac{\sigma^2_\theta}{\sigma^2_\rho}$$

Calculons $d\theta''$:

$$d\theta'' = -2\left(\frac{\rho'_{c,n}}{\rho_{c,n}} d\theta'_{c,n} + \frac{\theta'_{c,n}}{\rho_{c,n}} d\rho'_{c,n} - \frac{\rho'_{c,n}\theta'_{c,n}}{\rho^2_{c,n}} d\rho_{c,n}\right)$$

$$\mathrm{E}[(d\theta'')^2] = 4\left\{\left(\frac{\rho'_{c,n}}{\rho_{c,n}}\right)^2 \mathrm{E}[(d\theta'_{c,n})^2] + \left(\frac{\theta'_{c,n}}{\rho_{c,n}}\right)^2 \mathrm{E}[(d\rho'_{c,n})^2] + \frac{\rho'^2_{c,n}\theta'^2_{c,n}}{\rho^4_{c,n}}\mathrm{E}[(d\rho_{c,n})^2] - 2\frac{\rho'_{c,n}\theta'^2_{c,n}}{\rho^3_{c,n}}\mathrm{E}(d\rho'_{c,n}\, d\rho_{c,n})\right\}$$

Or

$$\frac{\mathrm{E}[(d\rho'_{c,n})^2]}{\sigma^2_\rho} = \mathrm{G}_{\rho,n}, \qquad \frac{\mathrm{E}(d\rho'_{c,n},\, d\rho_{c,n})}{\sigma^2_\rho} = \mathrm{C}_{\rho,n} = \frac{\xi_n}{\mathrm{T}_n}, \qquad \frac{\mathrm{E}[(d\rho_{c,n})^2]}{\sigma^2_\rho} = \alpha_n;$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{\mathrm{E}[(d\theta'')^2]}{\sigma^2_\theta} = 4\left[\left(\frac{\rho'_{c,n}}{\rho_{c,n}}\right)^2 \cdot \mathrm{G}_{\theta,n} + \left(\frac{\theta'_{c,n}}{\rho_{c,n}}\right)^2 \cdot \mathrm{G}_{\rho,n} \cdot \frac{\sigma^2_\rho}{\sigma^2_\theta} + \frac{\rho'^2_{c,n}\theta'^2_{c,n}}{\rho^4_{c,n}} \cdot \alpha_n \cdot \frac{\sigma^2_\rho}{\sigma^2_\theta} - \frac{2\rho'_{c,n}\theta'^2_{c,n}}{\rho^3_{c,n}} \cdot \frac{\beta_n}{\mathrm{T}_n} \cdot \frac{\sigma^2_\rho}{\sigma^2_\theta}\right]$$

3.2.3. Équations du correcteur.

Dans les relations précédentes, nous prendrons :

$$\rho'' = \rho_{c,n}\theta'^2_{c,n} \qquad \text{et} \qquad \theta'' = -\frac{2\rho'_{c,n}\theta'_{c,n}}{\rho_{c,n}};$$

les formules de récurrence deviennent :

$$\alpha_n = \frac{F_{\rho,n}}{1+F_{\rho,n}}, \qquad \frac{\beta_n}{T_n} = \frac{G_{\rho,n-1}T_n + \frac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}}}{1+F_{\rho,n}};$$

$$F_{\rho,n} = \alpha_{n-1} + G_{\rho,n-1}T_n^2 + 2\frac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}}T_n + \frac{1}{4}T_n^4 A_{n-1},$$

$$G_{\rho,n} = \frac{G_{\rho,n-1}(1+\alpha_{n-1}) + \frac{\beta_{n-1}}{T_{n-1}}}{1+F_{\rho,n}} + T_n^2 A_n,$$

avec

$$A_n = \theta'^{\,4}_{c,n}\alpha_n + 4\rho^2_{c,n}\theta'^{\,2}_{c,n}G_{\theta,n}\frac{\sigma^2_\theta}{\sigma^2_\rho}$$

$$\gamma_n = \frac{F_{\theta,n}}{1+F_{\theta,n}}, \qquad \frac{\delta_n}{T_n} = \frac{G_{\theta,n-1}T_n + \frac{\delta_{n-1}}{T_{n-1}}}{1+F_{\theta,n}};$$

$$F_{\theta,n} = \gamma_{n-1} + G_{\theta,n-1}T_n^2 + 2\frac{\delta_{n-1}}{T_{n-1}}T_n + \frac{1}{4}T_n^4 B_{n-1},$$

$$G_{\theta,n} = \frac{G_{\theta,n-1}(1+\gamma_{n-1}) + \frac{\delta_{n-1}}{T_{n-1}}}{1+F_{\theta,n}} + T_n^2 B_n,$$

avec

$$B_n = 4\left[\frac{\rho'_{c,n}}{\rho_{c,n}}G_{\theta,n} + \left(\frac{\theta'_{c,n}}{\rho_{c,n}}\right)^2 \cdot G_{\rho,n}\cdot\frac{\sigma^2_\rho}{\sigma^2_\theta} + \frac{\rho'^2_{c,n}\theta'^2_{c,n}}{\rho^4_{c,n}}\cdot\alpha_n\cdot\frac{\sigma^2_\rho}{\sigma^2_\theta} - \frac{2\rho'_{c,n}\theta'^2_{c,n}}{\rho^3_{c,n}}\cdot\frac{\beta_n}{T_n}\cdot\frac{\sigma^2_\rho}{\sigma^2_\theta}\right]$$

3.2.4. Importance des termes correctifs.

Celle-ci dépend des valeurs maximales de la vitesse et de l'importance relative des bruits sur θ et ρ.

Pour une vitesse maximale de 300 m/s et une distance minimale de 20 kilomètres, $\rho'' < 4{,}5$ m/s^2 et $\theta' < 10^{-4}$ rad/s; on ne peut donc négliger l'influence sur $\rho'_{p,n}$ et $\theta'_{p,n}$.

Pour $\sigma_\theta/\sigma_\rho = 10^{-4}$, la correction sur $G_{\rho,n}$ est toujours inférieure à $G_{\rho,n}/4$; elle est négligeable sur $F_{\rho,n}$; la correction sur $G_{\theta,n}$ est toujours inférieure à $G_{\theta,n}/20$; elle est négligeable sur $F_{\theta,n}$.

Nous pourrons donc nous contenter de corriger la vitesse et prendre les mêmes coefficients α et β pour la poursuite suivant ρ et suivant θ.

CHAPITRE IV

DÉTECTION DES BIFURCATIONS

§ 4.0. Introduction

En fait, la trajectoire rectiligne uniforme n'est qu'un cas théorique.

Le long d'une trajectoire réelle, certains tronçons seulement peuvent lui être assimilés, et l'on peut, sur ces tronçons, faire évoluer normalement les coefficients du correcteur du chapitre II; mais dès que la trajectoire subit une bifurcation (changement de direction ou de vitesse), il faut modifier les paramètres α et β.

Le problème consiste donc à détecter les bifurcations. Pour cela, nous allons d'abord préciser un modèle de trajectoire, puis calculer la probabilité qu'un certain écart mesuré corresponde en fait à une bifurcation [5].

§ 4.1. Modèle de l'entrée

En général, nous pouvons considérer la trajectoire rapportée à un plan et constituée de tronçons de droites raccordés par des arcs de cercles, la vitesse le long de la trajectoire étant pratiquement uniforme.

Nous supposons que les instants où la trajectoire prend une accélération transverse sont répartis à la Poisson dans le temps avec une période moyenne τ; les durées d'accélération seront en moyenne τ_1. Nous considérons seulement ce qui se passe entre deux instants de mesure (séparés de T_n).

Il y a la probabilité $P(0,T_n) = exp -\frac{T_n}{\tau}$ qu'il n'y ait pas de début d'arc de cercle dans l'intervalle T_n.

La probabilité d'avoir une trajectoire rectiligne dans l'intervalle T_n est celle de ne pas avoir de début d'arc de cercle pendant cet intervalle T_n et l'intervalle τ_1 qui le précède :

$$P(0, T_n + \tau_1) = \exp - \frac{T_n + \tau_1}{\tau} = A.$$

Dans le cas contraire, la trajectoire ne sera pas une droite. On peut alors envisager trois cas :

— c'est un tronçon de droite puis un arc de cercle;
— c'est uniquement un arc de cercle;
— c'est un arc de cercle puis un tronçon de droite.

Dans chacun de ces cas, le rayon du cercle est de longueur aléatoire.

L'exploitation d'un tel schéma conduirait à des calculs très complexes, leur forme dépend de l'état antérieur de la trajectoire, et ils ne peuvent être tabulés à l'avance. D'autre part l'accélération γ est toujours évaluée de façon très imprécise et la prédiction doit toujours se faire comme si la trajectoire était rectiligne pendant l'intervalle suivant.

En conséquence, nous adopterons le modèle ci-après :

1° Il y a une probabilité A que la trajectoire soit une droite pendant l'intervalle de temps T_n;

2° Il y a une probabilité 1 — A que la trajectoire soit un tronçon de droite suivi d'un arc de cercle;

3° Dans ce cas, tous les instants de l'intervalle T_n correspondent à une équiprobabilité pour le début de l'arc de cercle;

4° Les valeurs de l'accélération γ correspondant aux rayons possibles de l'arc de cercle sont comprises entre — Γ et + Γ, toutes les valeurs comprises entre ces limites étant équiprobables.

§ 4.2. **Aire d'évolution et aire de bruit**

4.2.1. Aire d'évolution.

En absence de bruit, on peut, en fonction de ce modèle, définir autour de la position prédite, une zone dans laquelle la position réelle doit nécessairement se trouver. Elle sera limitée par deux courbes :

— celle correspondant à l'accélération maximale $\pm$ Γ pendant des durées variant de 0 à T_n de la fin de l'intervalle;

— celle correspondant à une γ constante pendant tout l'intervalle avec des valeurs comprises entre — Γ et + Γ.

Si nous prenons comme unité de vitesse la vitesse du mobile, comme unité de temps le temps qui sépare deux mesures, nous nous sommes fixés pour Γ une valeur égale aux 4/3 de l'unité d'accélération correspondante.

L'aire d'évolution ainsi définie a la forme de la figure 4.1.

D'après les calculs que nous avons effectués, cette aire d'évolution est peu modifiée quand la trajectoire est un arc de cercle puis un tronçon de droite

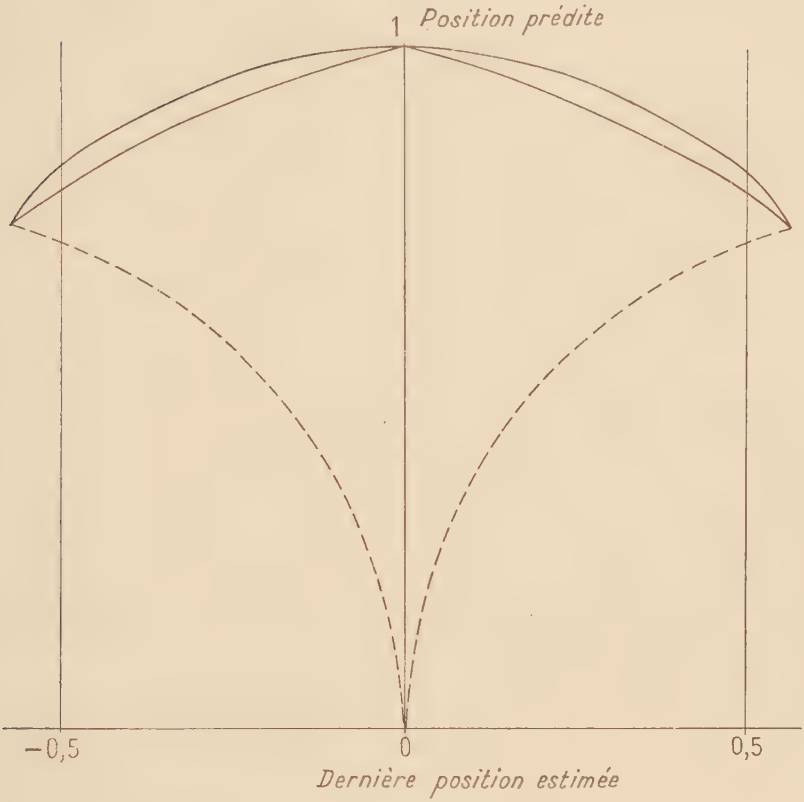


FIG. 4.1. — Forme de l'aire d'évolution

4.2.2. AIRE DE BRUIT.

Par suite du bruit sur la position estimée à l'instant de la mesure, du bruit sur la mesure elle-même, il faut, autour de chaque point de l'aire ainsi définie, tracer un rectangle correspondant à 4 e.m.q. suivant des axes rectangulaires le long desquels les bruits sont décorrélés. Nous obtiendrons ainsi la zone dans laquelle se trouvera nécessairement la mesure suivante.

Dans l'application pratique qui nous intéresse, les côtés du rectangle de bruit ont une dimension qui peut varier de 1/3 à 20 fois la plus grande dimension de l'aire d'évolution; les hypothèses faites sur les possibilités d'évolution sont donc légitimes, les déformations de la zone d'évolution sont toujours négligeables vis-à-vis de la zone de bruit. Dans cette zone future le point le plus probable sera toujours celui correspondant à la prédiction en ligne droite.

Ces considérations montrent que les calculs n'auront pas besoin d'une précision excessive.

§ 4.3. Principe de la détection des bifurcations

A chaque mesure effectuée (X_n, Y_n), nous pourrions, en toute rigueur, calculer la probabilité des diverses valeurs de γ susceptibles d'avoir donné cette mesure et du temps pendant lequel cette valeur a été réellement maintenue. Nous préférons faire un calcul approché en ne considérant l'écart que suivant un axe.

Nous pouvons choisir des axes rectangulaires fixes ou des coordonnées polaires mais, dans certains cas, l'écart dû à l'évolution suivant l'axe choisi pourra être faible et, si l'axe est parallèle à la vitesse, nous ne pourrons avoir de renseignement sur le signe de γ. Nous choisirons donc l'écart suivant la direction Z normale à la vitesse, à l'instant t_{n-1} : c'est suivant cet axe que le rapport de l'écart dû à l'évolution et de l'écart dû au bruit est le plus favorable.

La projection de γ suivant Z sera $\gamma_z = \gamma \cos \frac{\gamma t}{V}$; dans notre cas, la valeur maximale de $\frac{\gamma t}{V}$ est $\frac{\Gamma T_n}{V} = \frac{4}{3} = 76°$; pendant la plus grande partie de la trajectoire et pour les valeurs non extrêmes de γ, $\frac{\gamma t}{V}$ sera donc faible et l'on pourra prendre $\cos \frac{\gamma t}{V} = 1$ (ce qui revient à majorer l'aire d'évolution de 10 % suivant Z).

Nous cherchons la probabilité de chaque valeur de γ, l'écart Z_n étant mesuré soit $p(\gamma|Z_n)$ et en particulier nous voulons $p(\gamma = 0|Z_n)$, c'est-à-dire la probabilité d'avoir eu une trajectoire rectiligne.

Suivant l'axe Z considéré, la position estimée $Z_{c,n-1}$, la vitesse estimée $Z'_{c,n-1}$ et la position prédite $Z_{p,n-1}$ à l'instant t_{n-1} sont nulles; la mesure effectuée à l'instant t_n est Z_n.

Le passage de $Z_{c,n-1}$ à Z_n peut se décomposer en plusieurs étapes :

— imprécision sur la connaissance de $Z_{c,n-1}$, soit e.m.q. $= \sigma_{n-1}\sqrt{R_{n-1}}$;
— imprécision sur la connaissance de $Z'_{c,n-1}$, soit e.m.q. $= \sigma_{n-1}\sqrt{G_{n-1}}$;
— imprécision sur la connaissance de Z_n, soit e.m.q. $= \sigma_n$;
— influence de γ pendant le temps t.

Les trois premières étapes peuvent se résumer en une seule qu'on reporte après la quatrième et correspondant à un e.m.q. $= \sigma_n \sqrt{1 + \frac{F_n}{a_n}} = s_n$.

§ 4.4. Calcul de $p(\gamma = 0|Z_n)$.

On peut écrire :

$$p(\gamma \mid Z_n) = \frac{p(Z_n \mid \gamma)\, p(\gamma)}{p(Z_n)}.$$

4.4.1. Calcul de $p(\gamma)$.

D'après notre modèle,

$$p(\gamma = 0) = A \qquad \text{et} \qquad p(\gamma) = \frac{1 - A}{2\Gamma}.$$

4.4.2. Calcul de $p(Z_n|\gamma)$.

C'est la probabilité d'obtenir la mesure Z_n si l'accélération prise à un instant quelconque de l'intervalle a été γ.

Considérons d'abord la quatrième étape due à γ. La probabilité d'obtenir une mesure comprise entre Z_1 et $Z_1 + dZ_1$ est égale à celle d'avoir eu l'évolution entre les instants t et $t + dt$, soit $\frac{dt}{T_n}$.

La valeur correspondante de Z_1 est $\frac{\gamma t^2}{2}$, t désignant le temps durant lequel γ a agi. La probabilité d'obtenir Z_n à partir de Z_1 correspond à une loi de Gauss et donc :

$$p(Z_n,\ t\,|\,\gamma) = \frac{1}{T_n s_n \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(Z_n - Z_1)^2}{2 s_n^2},$$

$$p(Z_n\,|\,\gamma) = \frac{1}{T_n s_n \sqrt{2\pi}} \int_0^{T_n} \exp - \frac{\left(Z_n - \frac{\gamma t^2}{2}\right)^2}{2 s_n^2}\, dt.$$

Pour $\gamma = 0$, $p(Z_n|\gamma = 0) = \frac{1}{s_n \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{Z_n^2}{2 s_n^2}$ est indépendante des approximations faites sur la forme de la trajectoire.

4.4.3. Calcul de $p(Z_n)$.

C'est la loi de probabilité de l'écart qu'on observera par rapport à la position prédite.

C'est la somme de deux termes :

— celui en absence de bifurcation dû uniquement au bruit ($\gamma = 0$); soit :

$$\frac{A}{s_n \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{Z_n^2}{2 s_n^2};$$

— celui correspondant à une bifurcation qui contiendra le facteur (1 — A).

La probabilité de l'instant de bifurcation est $\frac{dt}{T_n}$. Pour cet instant, la probabilité d'obtenir une valeur comprise entre Z_1 et $Z_1 + dZ_1$ est celle d'avoir γ compris entre γ et $\gamma + d\gamma$, soit $\frac{d\gamma}{2\Gamma}$ avec $Z_1 = \frac{\gamma t^2}{2}$ et $dZ_1 = \frac{t^2 d\gamma}{2}$.

Donc :

$$p(Z_1 \text{ et } t)\, dt\, dZ_1 = p(Z_1\,|\,t)\, p(t)\, dt\, dZ_1 = \frac{dt\, d\gamma}{2\Gamma T_n} = \frac{dt\, dZ_1}{\Gamma T_n t^2}.$$

Seules les valeurs de t comprises entre $t_1 = \sqrt{\left|\frac{2Z_1}{\Gamma}\right|}$ et T_n permettent d'obtenir Z_1; donc :

$$p(Z_1)\, dZ_1 = \frac{dZ_1}{\Gamma T_n} \int_{t_1}^{T_n} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\Gamma T_n} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{T_n}\right) dZ_1.$$

Les valeurs possibles de Z_1 sont comprises entre $-\frac{\Gamma T_n^2}{2}$ et $+\frac{\Gamma T_n^2}{2}$ en ajoutant l'étape bruit :

$$p(Z_n) = \frac{1}{\Gamma T_n s_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \left(\sqrt{\left| \frac{\Gamma}{2 Z_1} \right|} - \frac{1}{T_n} \right) \exp - \frac{(Z_n - Z_1)^2}{2 s_n^2} dZ_1,$$

qu'on peut écrire $\frac{J}{s_n \sqrt{2\pi}}$.

4.4.4. Expression de $p(\gamma | Z_n)$.

$$p(\gamma \mid Z_n) = \frac{1 - A}{2 \Gamma T_n} \frac{\int_0^{T_n} \exp - \frac{1}{2 s_n^2} \left(Z_n - \frac{\gamma t^2}{2} \right) dt}{A \exp - \frac{Z_n^2}{2 s_n^2} + (1 - A) J};$$

$$p(\gamma = 0 \mid Z_n) = \frac{1}{1 + \frac{(1 - A) J}{A \exp - \frac{Z_n^2}{2 s_n^2}}}.$$

§ 4.5. **Calcul numérique**

4.5.1. Transformation mathématique de J.

Posons :

$$\frac{Z_1}{s_n} = Y \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma T_n^2}{2 s_n} = B;$$

Il vient :

$$J = \int_{-B}^{+B} \left(\sqrt{\frac{1}{4B \mid Y \mid}} - \frac{1}{2B} \right) \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_n}{s_n} - Y \right)^2 dY.$$

On peut décomposer cette intégrale en deux parties :

$$J_1 = - \int_{-B}^{+B} \frac{1}{2B} \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_n}{s_n} - Y \right)^2 dY.$$

En posant :

$$u = \left(\frac{Z_n}{s_n} - Y \right) / \sqrt{2}, \qquad J_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4B} \int_{\left(\frac{Z_n}{s_n} + B \right) / \sqrt{2}}^{\left(\frac{Z_n}{s_n} - B \right) / \sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du,$$

soit :

$$J_1 = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{4\,B}\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{Z_n}{s_n} - B\right)/\sqrt{2} - \mathrm{Erf}\left(\frac{Z_n}{s_n} + B\right)/\sqrt{2}\right].$$

$$J_2 = \int_{-B}^{+B} \frac{1}{2\sqrt{B\,|\,Y\,|}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{Z_n}{s_n} - Y\right)^2 dY.$$

En posant $u = \sqrt{\frac{Y}{B}}$ pour $0 < Y < B$, et $u = \sqrt{-\frac{Y}{B}}$ pour $-B < Y < 0$.

$$J_2 = \int_0^1 \left[\exp - \frac{1}{2}\left(\frac{Z_n}{s_n} - Bu^2\right)^2 + \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{Z_n}{s_n} + Bu^2\right)^2\right] du.$$

4.5.2. Méthode de calcul et valeurs des paramètres.

Nous avons effectué les calculs sur CAB 500.

Nous disposions d'un sous-programme de la fonction d'erreur [11].

Nous avons calculé l'intégrale J_2 à l'aide de la formule des trapèzes. Pour les fortes valeurs de B, les dérivées successives peuvent prendre des valeurs élevées dans l'intervalle d'intégration, et il aurait fallu prendre un pas très petit; nous avons résolu ce problème en réduisant l'intervalle d'intégration à la zone dans laquelle les exponentielles sont supérieures à 10^{-6}; la précision maximale de la tabulation est donc 10^{-6}.

Nous avons supposé des accélérations maximales de 50 m/s^2, ce qui entraîne $B = \frac{\Gamma\,T_n^2}{2\,s_n} < 8$.

Les écarts maximaux observables valent $\frac{\Gamma\,T_n^2}{2}$ plus trois fois l'e.m.q. s_n, soit : $\frac{Z_n}{s_n} = B + 3$.

Les résultats numériques sont donnés dans les tableaux 4.1 et 4.2, et sur la figure 4.2.

TABLEAU 4·1

VALEURS DE J POUR B = 0,5 ET B = 1

B = 0,5		B = 1	
Z_n/s_n	J	Z_n/s_n	J
0	0,991810	0	0,969151
0,35	0,933808	0,4	0,898857
0,7	0,779380	0,8	0,717189
1,05	0,576644	1,2	0,492435
1,4	0,378219	1,6	0,291107
1,75	0,221992	2	0,148263
2,1	0,113369	2,4	0,065116
2,45	0,051815	2,8	0,024678
2,8	0,020997	3,2	0,008081
3,15	0,007544	3,6	0,002288
3,5	0,002404	4	0,000560

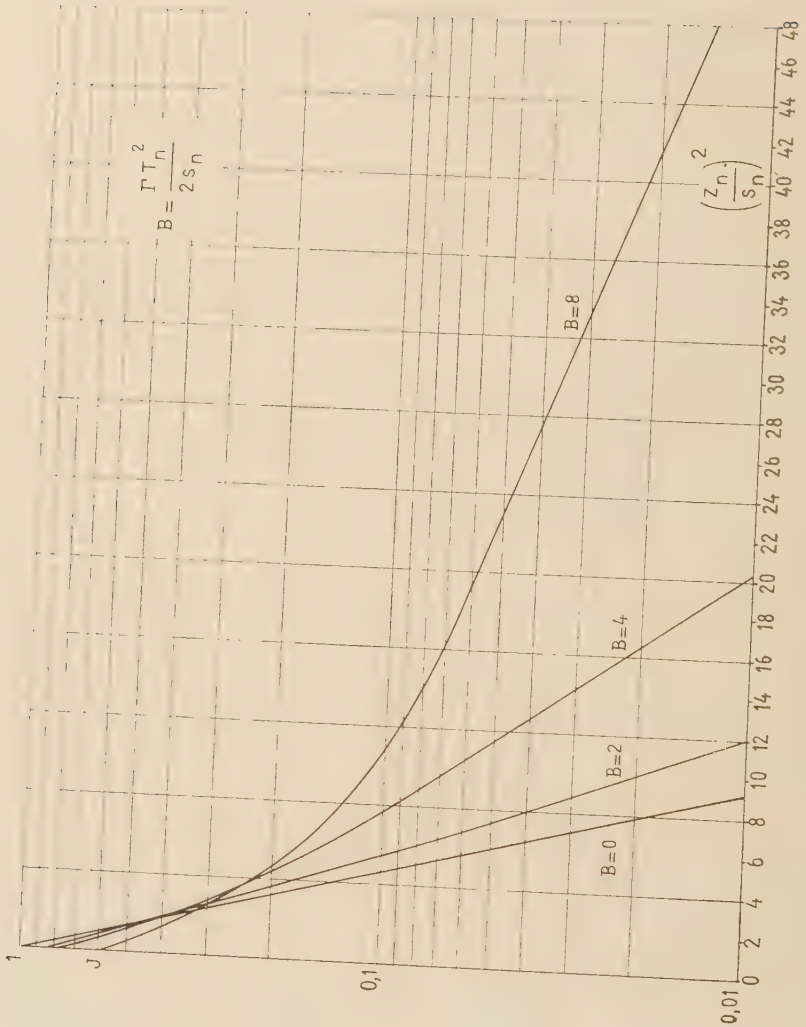


FIG. 4.2. — Probabilité d'observer un écart donné

TABLEAU 4.2

VALEURS DE J POUR B = 0, B = 2, B = 4, B = 8

Z_n/s_n	B = 0 $J = \exp - Z_n^2/2\,s_n^2$	B = 2	B = 4	B = 8
0.....	1	0,899815	0,764572	0,605526
0,5.....	0,882497	0,811051	0,700584	0,560280
1.....	0,606531	0,595366	0,543714	0,449351
1,5.....	0,324653	0,358476	0,367138	0,324467
2.....	0,135335	0,179027	0,225356	0,224076
2,5.....	0,043937	0,075139	0,131926	0,157536
3.....	0,011109	0,026802	0,075610	0,116445
3,5.....	0,002187	0,008159	0,041941	0,089978
4.....	0,000335	0,002110	0,021726	0,071183
4,5.....	0,000040	0,000456	0,010106	0,056646
5.....	0,000004	0,000078	0,004059	0,044794
5,5.....	0,000000		0,001381	0,034833
6.....			0,000390	0,026316
6,5.....			0,000090	0,019020
7.....			0,000017	0,012897
7,5.....				0,008020
8.....				0,004462
8,5.....				0,002169
9.....				0,000901
9,5.....				0,000314
10.....				0,000090
10,5.....				0,000021
11.....				0,000004

4.5.3. Interprétation.

En fait, nous avons tracé la courbe $\log J = f\left(\frac{Z_n}{s_n}\right)^2$ par analogie avec $y = \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{Z_n}{s_n}\right)^2$.

Dès que l'écart est important, nous retrouvons une loi linéaire, et nous pouvons écrire :

$$J = \frac{b}{s_n \sqrt{2\pi}} \exp - d^2 \frac{Z_n^2}{2\,s_n^2}.$$

Les valeurs de b et d sont données dans le tableau 4.3.

Pour les faibles valeurs de $B = \frac{1}{2}\frac{T^2}{s_n}$, les écarts par rapport à la droite sont très petits et $b \simeq d$; la possibilité d'évolution se traduit donc uniquement par une augmentation de l'e.m.q.

TABLEAU 4·3.

TERMES CORRECTIFS DE L'E.M.Q. POUR DIVERSES VALEURS DE $\Gamma T_n^2/2\, s_n$

$\Gamma T_n^2/2\, s_n$	b	d
0	1	1
1	0,95	0,95
2	0,750	0,74
4	0,400	0,37
8	0,165	0,1

4.5.4. Comparaison de J avec exp $- Z_n^2/2s_n^2$.

C'est le rapport $L = J/\exp - Z_n^2/2s_n^2$ qui figure dans l'expression de $p(\gamma = 0|Z_n)$. Nous cherchons donc à trouver une formule d'approximation de cette quantité en vue de simplifier les calculs. Les courbes de la figure 4.3 représentent L en fonction de Z_n/s_n. Elles nous montrent que la fenêtre de bruit doit dépendre de $\Gamma T_n^2/2\, s_n$ et on peut convenir de fixer la dimension maximum $3\delta s_n$ de cette fenêtre par la valeur Z_n/s_n qui donne $L = 2$. On obtient :

$$\delta = 2{,}3/3 \quad \text{pour } \Gamma T_n^2/2\, s_n > 4,$$
$$\delta = 2{,}75/3 \quad \text{pour } \Gamma T_n^2/2\, s_n = 2,$$
$$\delta = 4{,}5/3 \quad \text{pour } \Gamma T_n^2/2\, s_n = 1.$$

On peut normer les écarts par rapport à δs_n; les courbes sont alors plus groupées et, vu la faible précision nécessaire, nous pourrons, dans le domaine utile, approximer L par $1 + (Z_n/\delta s_n)^6$.

FIG. 4.3. — Détermination de la fenêtre de bruit

CHAPITRE V

CALCUL DU CORRECTEUR EN TENANT COMPTE DES BIFURCATIONS

§ 5.0. **Introduction** [6]

Nous suivrons les coordonnées suivant deux directions rectangulaires arbitraires Ox et Oy en admettant que les bruits ne sont pas corrélés suivant ces axes. Nous ne détaillerons les calculs que suivant un axe Ox fixe, sachant qu'ils sont identiques suivant la direction Oy.

Nous utilisons les mêmes méthodes de calcul que dans le cas de la trajectoire rectiligne uniforme; dans ce cas là, les quantités X_c, X'_c et X_p pouvaient ne représenter que le bruit sur ces quantités, les formules étaient exactes pour les valeurs réelles; ici, les formules ne seront plus rigoureuses en absence de bruit et nous devons introduire les quantités $X_{r,n}$ et $X'_{r,n}$: position et vitesses réelles à l'instant t_n.

Nous minimiserons :

$$\mathrm{E}\,(X_{c,\,n} - X_{r,\,n})^2,\ \mathrm{E}\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n})^2 \text{ et } \mathrm{E}\,(X_{p,\,n} - X_{r,\,n+1})^2.$$

Posons :

$$\sigma_n^2\,R_n = \mathrm{E}\,(X_{c,\,n} - X_{r,\,n})^2,\ \sigma_n^2\,G_n = \mathrm{E}\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n})^2,$$
$$\sigma_n^2\,F_{n+1} = \mathrm{E}\,(X_{p,\,n} - X_{r,\,n+1})^2,\ \sigma_n^2\,C_n = \mathrm{E}\,(X_{c,\,n} - X_{r,\,n})\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n}).$$

Chacune de ces quantités comprend deux parties :

L'une correspondant à la trajectoire rectiligne uniforme; le calcul est alors identique à celui du chapitre II et nous reprendrons les valeurs déjà calculées R_n, G_n et C_n (que nous noterons R_{n1}, G_{n1} et C_{n1}), multipliées par la probabilité $p(\gamma = 0|Z_n)$ [que nous noterons H dans la suite];

L'autre correspondant à la bifurcation; ce terme sera multiplié par (1 — H). Nous noterons les quantités correspondantes R_{n2}, G_{n2} et C_{n2}.

Pour calculer le deuxième terme, on peut envisager la question de deux façons différentes :

1° L'estimation de γ à partir du calcul de $p(\gamma|Z_n)$ étant toujours difficile et imprécise, nous pouvons considérer que le seul renseignement que nous gardons sur $X_{r,n}$ est la mesure effectuée X_n et que l'estimation de la vitesse doit se faire en prenant $X_{c,n-1}$ et X_n;

2° Au contraire, nous pouvons estimer la position $X_{r,n}$ et la vitesse $X'_{r,n}$ à partir de γ évaluée à l'aide de $p(\gamma|Z_n)$, de la position et de la vitesse corrigées à l'instant précédent.

Dans ce chapitre nous développerons les calculs afférents à ces deux méth
des. Des études expérimentales nous permettrons, dans la suite, de choisir
meilleure en tenant compte des performances et des difficultés de calcul.

§ 5.1. **Première méthode, sans estimation de** γ

5.1.1. Minimisation de R_n.

5.1.1.1. *Calcul de* R_{n2}. — Le seul renseignement que nous gardons s
$X_{r,n}$ est la mesure effectuée X_n. En conséquence, la probabilité d'avoir
position réelle entre $X_{r,n}$ et $X_{r,n} + dX_{r,n}$ est

$$\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(X_n - X_{r,n})^2}{2\sigma_n^2}\, dX_{r,n}.$$

Nous considérons uniquement $X_{r,n}$ comme quantité aléatoire :

$$\sigma_n^2 R_{n2} = E\,(X_{c,n} - X_{r,n})^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_{p,n-1}(1-\alpha_n) + \alpha_n X_n - X_{r,n}]^2 \exp - \frac{(X_n - X_{r,n})^2}{2\sigma_n^2} dX_r$$

$$= (1-\alpha_n)^2 (X_{p,n-1} - X_n)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{(X_n - X_{r,n})^2}{2\sigma_n^2} \cdot \frac{dX_{r,n}}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}$$

$$+ 2\,(X_{p,n-1} - X_n)\,(1-\alpha_n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_n - X_{r,n}}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(X_n - X_{r,n})^2}{2\sigma_n^2} dX$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(X_n - X_{r,n})^2}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(X_n - X_{r,n})^2}{2\sigma_n^2} dX_{r,n}.$$

Tous calculs faits :

$$R_{n2} = (1-\alpha_n)^2 \frac{(X_{p,n-1} - X_n)^2}{\sigma_n^2} + 1.$$

5.1.1.2. *Expression globale de* R_n *et valeur de* α_n.

$$R_n = H R_{n1} + (1-H)\,R_{n2}.$$

$$R_n = H\left[(1-\alpha_n)^2 \frac{F_n}{a_n} + \alpha_n^2\right] + (1-H)\left[(1-\alpha_n)^2 \frac{(X_{p,n-1} - X_n)^2}{\sigma_n^2} + 1\right].$$

Nous poserons dans la suite :

$$D = \frac{1-H}{H} \cdot \frac{(X_{p,n-1} - X_n)^2}{\sigma_n^2}.$$

Dès lors :

$$R_n = H\left[(1-\alpha_n)^2\left(\frac{F_n}{a_n}+D\right)+\alpha_n^2+\frac{1-H}{H}\right];$$

$$\frac{\partial R_n}{\partial \alpha_n} = 2H\left[\alpha_n-(1-\alpha_n)\left(\frac{F_n}{a_n}+D\right)\right].$$

Cette dérivée s'annule pour : $\alpha_n = \dfrac{F_n/a_n + D}{1 + F_n/a_n + D}$, et R_n vaut alors : $R_n = H\alpha_n + 1 - H$.

Les résultats sont d'autant plus proches de ceux obtenus sans tenir compte des bifurcations que $X_{p,n-1} - X_n$ est plus petit, d'autant qu'alors H devient plus grand.

En toute rigueur l'écart sur $X_{c,n}$ n'est plus gaussien.

5.1.2. Minimisation de G_n.

5.1.2.1. *Calcul de* G_{n2}. — Nous calculons la vitesse à partir des coordonnées $X_{c,n-1}$ à l'instant t_{n-1} et X_n à l'instant t_n.

La valeur la plus probable de $X'_{r,n}$ est alors $\dfrac{X_n - X_{c,n-1}}{T_n}$, avec un écart quadratique moyen $\dfrac{\sigma_n}{T_n}\sqrt{1+\dfrac{R_{n-1}}{a_n}}$.

En suivant la même méthode que pour R_{n2}, nous pouvons écrire :

$$\sigma_n^2 G_{n2} = E(X'_{c,n} - X'_{r,n})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[X'_{c,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1}) - X'_{r,n}\right]^2 \exp - \frac{\left(\dfrac{X_n - X_{c,n-1}}{T_n} - X'_{r,n}\right)^2}{2\dfrac{\sigma_n^2}{T_n}\left(1+\dfrac{R_{n-1}}{a_n}\right)} dX'_{r,n}$$

ce qui conduit à :

$$G_{n2} = \frac{(1-\beta_n)^2}{T_n^2}\cdot\frac{(X_n - X_{p,n-1})^2}{\sigma_n^2} + \frac{1}{T_n^2}\left(1+\frac{R_{n-1}}{a_n}\right).$$

5.1.2.2. *Expression globale de* G_n *et valeur de* β_n. —

$$G_n = HG_{n1} + (1-H)G_{n2}.$$

$$G_n = H\left[\frac{G_{n-1}}{a_n} + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2\left(1+\frac{F_n}{a_n}+D\right) - 2\frac{\beta_n}{T_n}\left(\frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} + \frac{D}{T_n}\right) + \frac{D}{T_n^2}\right] + \frac{(1-H)}{T_n^2}\left(1+\frac{R_{n-1}}{a_n}\right);$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial \beta_n} = \frac{2H}{T_n}\left[\frac{\beta_n}{T_n}\left(1+\frac{F_n}{a_n}+D\right) - \left(\frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} + \frac{D}{T_n}\right)\right].$$

Cette dérivée est nulle pour :

$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{C_{n-1}/a_n + T_n G_{n-1}/a_n + D/T_n}{1 + F_n/a_n + D},$$

et G_n vaut alors :

$$G_n = H\,\frac{\dfrac{G_{n-1}}{a_n} + \dfrac{R_{n-1}\,G_{n-1}}{a_n^2} - \dfrac{C_{n-1}^2}{a_n^2} + \dfrac{D}{T_n^2}\left(1 + \dfrac{R_{n-1}}{a_n}\right)}{1 + F_n/a_n + D} + \frac{(1-H)}{T_n^2}\left(1 + \frac{R_{n-1}}{a_n}\right).$$

5.1.3. Minimisation de F_{n+1}.

On suppose qu'il n'y a pas de bifurcation pendant l'intervalle de temp T_{n+1}.

$$E\,(X_{p,\,n} - X_{r,\,n+1})^2 = E\,(X_{c,\,n} - X_{r,\,n})^2 + T_{n+1}^2\,E\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n})^2 + 2\,T_{n+1}\,E\,(X_{c,\,n} - X_{r,\,n})\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n})$$

Il nous reste à étudier le troisième terme et à vérifier qu'il est minim pour les valeurs α_n et β_n calculées précédemment.

5.1.3.1. *Calcul de* C_{n2}.

$$E\,(X_n - X_{r,\,n})\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n}) = E\,[(X_n - X_{p,\,n-1})\,(\alpha_n - 1) + X_n - X_{r,\,n}]\left[(X_n - X_{p,\,n-1})\frac{(\beta_n - 1)}{T_n} + \frac{X_n - X_{c,\,n-1}}{T_n} - X'_{r,\,n}\right]$$

$$= \frac{(\alpha_n - 1)\,(\beta_n - 1)}{T_n}\,(X_n - X_{p,\,n-1})^2 + E\,(X_n - X_{r,\,n})\left(\frac{X_n - X_{c,\,n-1}}{T_n} - X'_{r,\,n}\right).$$

où

$$X'_{r,\,n} = \frac{X_{r,\,n} - X_{r,\,n-1}}{T_n}.$$

$X_{r,n-1}$ n'est pas corrélé avec $X_{r,n}$ à cause de la bifurcation; donc :

$$E\,(X_{c,\,n} - X_{r,\,n})\,(X'_{c,\,n} - X'_{r,\,n}) = \frac{(\alpha_n - 1)\,(\beta_n - 1)}{T_n}\,(X_n - X_{p,\,n-1})^2 + \frac{\sigma_n^2}{T_n}.$$

5.1.3.2. *Expression globale de* C_n.

$$C_n = H\left[(1 - \alpha_n)\left(\frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n\,G_{n-1}}{a_n} + \frac{D}{T_n}\right) + \frac{\alpha_n\,\beta_n}{T_n} - (1 - \alpha_n)\,\frac{\beta_n}{T_n}\left(\frac{F_n}{a_n} + D\right)\right] + \frac{(1 - H}{T_n}$$

$\dfrac{\partial C_n}{\partial \alpha_n}$ et $\dfrac{\partial C_n}{\partial \beta_n}$ seront nulles pour :

$$\alpha_n = \frac{F_n/a_n + D}{1 + F_n/a_n + D} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_n}{T_n} = \frac{C_{n-1}/a_n + T_n G_{n-1}/a_n + D/T_n}{1 + F_n/a_n + D}.$$

Pour ces valeurs, C_n vaut :

$$C_n = H\left(\frac{\beta_n}{T_n}\right) + \frac{(1 - H)}{T_n}.$$

5.1.4. Initialisation des coefficients.

Lorsqu'il n'y a que deux mesures effectuées, il est impossible de faire le calcul de H; nous considérerons donc que la vitesse a été constante pendant tout l'intervalle et nous devrons donc prendre $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$ et $G_1 = 2$. Pour les mesures suivantes, nous pouvons déterminer H et les formules établies permettent de calculer les coefficients du correcteur.

5.1.5. Tableau des formules de récurrence.

$$F_n = R_{n-1} + T_n^2 G_{n-1} + 2 T_n C_{n-1}, \qquad \alpha_n = \frac{F_n/a_n + D}{1 + F_n/a_n + D},$$

$$R_n = H \alpha_n + 1 - H,$$

$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{C_{n-1}/a_n + T_n G_{n-1}/a_n + D/T_n}{1 + F_n/a_n + D},$$

$$G_n = \frac{H\left[\frac{G_{n-1}}{a_n} + \frac{R_{n-1} G_{n-1}}{a_n^2} - \frac{C_{n-1}^2}{a_n^2} + \frac{D}{T_n^2}\left(1 + \frac{R_{n-1}}{a_n}\right)\right]}{1 + F_n/a_n + D} + \frac{(1-H)}{T_n^2}\left(1 + \frac{R_{n-1}}{a_n}\right),$$

$$C_n = H \frac{\xi_n}{T_n} + \frac{(1-H)}{T_n}.$$

§ 5.2. **Deuxième méthode, avec estimation de γ**

Connaissant $p(\gamma$ et $t|Z_n)$, nous pouvons estimer la fraction de l'écart et la variation de vitesse dues à l'évolution. Nous désignons par $E(x)$ et $E(w)$ leur composante suivant l'axe Ox. Nous pouvons ainsi écrire :

$$E(X_{r,n}) = X_{r,n-1} + T_n X'_{r,n-1} + E(x),$$
$$E(X'_{r,n}) = X'_{r,n-1} + E(w),$$

et calculer les nouvelles expressions de :

$$E(X_{c,n} - X_{r,n})^2 \qquad \text{et} \qquad E(X'_{c,n} - X'_{r,n})^2.$$

Nous poserons :

$$E(x) = \lambda (X_n - X_{p,n-1}) \qquad \text{et} \qquad E(w) = \frac{\mu}{T_n}(X_n - X_{p,n-1}).$$

5.2.1. Calcul de $E(X_{c,n} - X_{r,n})^2$.

$$(X_{c,n} - X_{r,n})^2 = E[\alpha_n (X_n - X_{p,n-1}) + X_{c,n-1} - X_{r,n-1} + T_n (X'_{c,n-1} - X'_{r,n-1}) - x]^2.$$

En remarquant que x n'est pas corrélé avec les position et vitesse à l'i
tant t_{n-1} :

$$E(X_{c,n} - X_{r,n})^2 = \alpha_n^2 (X_n - X_{p,n-1})^2 + \frac{F_n}{a_n}\sigma_n^2 + E(x)^2 - 2\alpha_n\lambda (X_n - X_{p,n-1}$$

L'expression globale de R_n devient :

$$R_n = H\left[(1-\alpha_n)^2\frac{F_n}{a_n} + \alpha_n^2 + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n\lambda)D\right] + (1-H)\left[\frac{E(x)^2}{\sigma_n^2} + \frac{F_n}{a_n}\right],$$

qui est minimale pour :

$$\alpha_n = \frac{F_n/a_n + \lambda D}{1 + F_n/a_n + D}$$

et vaut alors :

$$R_n = \frac{F_n}{a_n} - H\frac{(F_n/a_n + \lambda D)^2}{1 + F_n/a_n + D} + (1-H)\frac{E(x)^2}{\sigma_n^2}.$$

5.2.2. Calcul de $E(X'_{c,n} - X'_{r,n})^2$.

$$E(X'_{c,n} - X'_{r,n})^2 = E(X'_{c,n} - X'_{r,n-1})^2 + E(w)^2 - 2E[w(X'_{c,n} - X'_{r,n-1}$$

Le premier terme se calcule en remplaçant $X'_{c,n}$ par sa valeur en fonct
de β_n et en considérant $X'_{r,n-1}$ comme une variable aléatoire gaussien
d'e.m.q. $\sigma_n\sqrt{\frac{G_{n-1}}{a_n}}$;

il vaut

$$\left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (X_n - X_{p,n-1})^2 + \sigma_n^2\frac{G_{n-1}}{a_n}.$$

De même, en remarquant que w et $X'_{c,n-1} - X'_{r,n-1}$ sont indépe
dants, le troisième terme vaut : $2\frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1})E(w)$.

Nous obtenons donc :

$$E(X'_{c,n} - X'_{r,n})^2 = \left[\left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 - 2\frac{\beta_n\mu}{T_n}\right](X_n - X_{p,n-1})^2 + E(w)^2 + \sigma_n^2\frac{G_{n-1}}{a_n}.$$

L'expression générale de G_n devient :

$$G_n = H\left[\frac{G_{n-1}}{a_n} + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2\left(1 + \frac{F_n}{a_n} + D\right) - 2\frac{\beta_n}{T_n}\left(\frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} + \frac{\mu D}{T_n}\right)\right] + (1-H)\left[\frac{E(w)^2}{\sigma_n^2} + \frac{G_{n-1}}{a_n}\right.$$

qui est minimale pour :

$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{C_{n-1}/a_n + T_n G_{n-1}/a_n + \mu D/T_n}{1 + F_n/a_n + D};$$

G_n vaut alors :

$$G_n = \frac{G_{n-1}}{a_n} - H \frac{(C_{n-1}/a_n + T_n G_{n-1}/a_n + \mu D/T_n)^2}{1 + F_n/a_n + D} + (1 - H) \frac{E(w)^2}{\sigma_n^2}.$$

5.2.3. Calcul de $E(X_{c,n} - X_{r,n})(X'_{c,n} - X'_{r,n})$.

$$E(X_{c,n} - X_{r,n})(X'_{c,n} - X'_{r,n})$$
$$= E\left[(X_n - X_{p,n-1})\alpha_n + X_{c,n-1} - X_{r,n-1} + T_n(X'_{c,n-1} - X'_{r,n-1}) - x\right]$$
$$\left[\frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1}) + X'_{c,n-1} - X'_{r,n-1} - w\right].$$

Avec les mêmes remarques qu'en 5.2.2, on trouve :

$$E(X_{c,n} - X_{r,n})(X'_{c,n} - X'_{r,n}) = \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1})^2 - \alpha_n (X_n - X_{p,n-1}) E(w)$$
$$- \frac{\beta_n}{T_n}(X_n - X_{p,n-1}) E(x) + \sigma_n^2 \left(\frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n}\right) + E(xw).$$

L'expression globale de C_n devient :

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} - H\left[\alpha_n \left(\frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} + \frac{\mu D}{T_n}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}\left(1 + \frac{F_n}{a_n} + D\right) + \frac{\beta_n}{T_n}\left(\frac{F_n}{a_n} + \lambda D\right)\right] + \frac{(1 - H) E(xw)}{\sigma_n^2}$$

C_n est bien minimal pour les valeurs de α_n et β_n trouvées précédemment et vaut dans ce cas :

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} - H \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}\left(1 + \frac{F_n}{a_n} + D\right) + (1 - H) \frac{E(xw)}{\sigma_n^2}.$$

5.2.4. Tableau des formules de récurrence.

$$F_n = R_{n-1} + T_n^2 G_{n-1} + 2 T_n C_{n-1}, \qquad \alpha_n = \frac{F_n/a_n + \lambda D}{1 + F_n/a_n + D},$$
$$R_n = \frac{F_n}{a_n} - H\alpha_n^2\left(1 + \frac{F_n}{a_n} + D\right) + (1 - H) \frac{E(x)^2}{\sigma_n^2},$$
$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{C_{n-1}/a_n + T_n G_{n-1}/a_n + \mu D/T_n}{1 + F_n/a_n + D},$$
$$G_n = \frac{G_{n-1}}{a_n} - H\left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2\left(1 + \frac{F_n}{a_n} + D\right) + (1 - H) \frac{E(w)^2}{\sigma_n^2},$$
$$C_n = \frac{C_{n-1}}{a_n} + \frac{T_n G_{n-1}}{a_n} - H \frac{\alpha_n \beta_n}{T_n}\left(1 + \frac{F_n}{a_n} + D\right) + (1 - H) \frac{E(xw)}{\sigma_n^2}.$$

§ 5.3. **Conclusion**

L'étude numérique des deux méthodes nous permettra de déterm
leurs efficacités respectives. Toutefois, les calculs sont considérablem
augmentés dans la seconde à cause de la détermination de $E(x)$, $E(w)$, $E($
$E(w)^2$, $E(xw)$; elle ne sera intéressante que si elle apporte une amélioral
sensible.

CHAPITRE VI

PERFORMANCES DU CORRECTEUR SANS ESTIMATION DE L'ACCÉLÉRATION

§ 6.1. **Trajectoire test**

Nous n'utilisons pas des trajectoires réelles, trop longues à construire et de dépouillement délicat. Nous supposons le mobile se déplaçant suivant une droite, la vitesse étant choisie nulle pour les évolutions à vitesse constante, les bifurcations étant obtenues par des échelons de vitesse d'amplitude réglable.

La période d'échantillonnage est prise comme unité de temps; les longueurs sont normées par rapport à σ_n. Dans ces conditions, les bifurcations les plus importantes que nous ayons à étudier correspondent à $\Delta V = 7$.

Cette trajectoire peut être bruitée; dans ce but, nous avons établi, à l'aide de la CAB 500 [21], une suite de nombres de moyenne nulle et d'e.m.q. égal à 1; il suffit de les ajouter à chaque coordonnée de la trajectoire.

§ 6.2. **Choix *a priori* de la valeur de A**

La quantité A (voir paragraphe 4.1) représente la probabilité *a priori* d'avoir une trajectoire rectiligne entre deux mesures. Elle est liée à la durée moyenne τ_1 des accélérations et à la période moyenne τ qui sépare les instants de début d'accélération; nous avions posé : $A = \exp -(T_n + \tau_1)/\tau$; pour des pistes réelles, il est difficile de choisir les valeurs de τ_1 et τ.

Pour les petites valeurs de τ, on pourra négliger τ_1 vis-à-vis de T_n. Le tableau 6.1 donne, pour diverses valeurs de τ, les valeurs de A en négligeant τ_1.

TABLEAU 6.1.

PROBABILITÉ A PRIORI D'ÉVOLUTION POUR DIVERSES VALEURS DE τ

τ_{sec}	40	80	160	400	800	1 600	10 000
A	0,82	0,905	0,951	0,98	0,99	0,995	0,9999

Il semble que les valeurs les plus réalistes se trouvent entre 0,9 et 0,95; toutefois, nous étudierons le comportement du système pour A variant de 0,7 à 0,9999.

§ 6.3. Valeurs limites de α, β et F en fonction de A

Pour cette étude, nous supposons $\delta = 1$ (voir 4.5.4), c'est-à-dire que nou prenons $3s_n$ comme fenêtre de bruit.

Le tableau 6.2 et la figure 6.1 donnent les valeurs limites de α, β et F pou diverses valeurs de A.

TABLEAU 6·2.

VALEURS LIMITES DE α, β ET F POUR DIVERSES VALEURS DE A

A	α	β	F
0,7	0,725	0,354	2,64
0,8	0,685	0,309	2,177
0,9	0,614	0,240	1,591
0,95	0,543	0,182	1,190
0,97	0,493	0,147	0,972
0,98	0,455	0,124	0,834
0,99	0,394	0,091	0,650
0,995	0,340	0,066	0,515
0,997	0,304	0,052	0,437
0,998	0,279	0,043	0,387
0,999	0,249	0,040	0,318
0,9995	0,219	0,024	0,275
0,9999	0,201	0·017	0,240

Les figures 6.2 et 6.3 traduisent l'évolution de α et β en fonction d nombre de mesures effectuées pour diverses valeurs de A. Nous aurions u réseau de même forme pour F.

Nous constatons que les valeurs limites sont d'autant plus grandes et plu vite atteintes que la probabilité de bifurcation est plus grande.

L'évolution des couples (α, β) suit d'abord les valeurs calculées au ch pitre II puis, les termes correctifs cessant d'être négligeables, α et β décroi sent moins vite. Les courbes tracées représentent leur évolution pour un entrée non bruitée; les deux courbes en pointillé correspondent au contrai à une entrée bruitée : à chaque mesure le terme correctif est un peu plu élevé, ce qui fait encore diminuer moins vite α et β.

Ces courbes nous donnent quelques indications pour le choix pratique de A

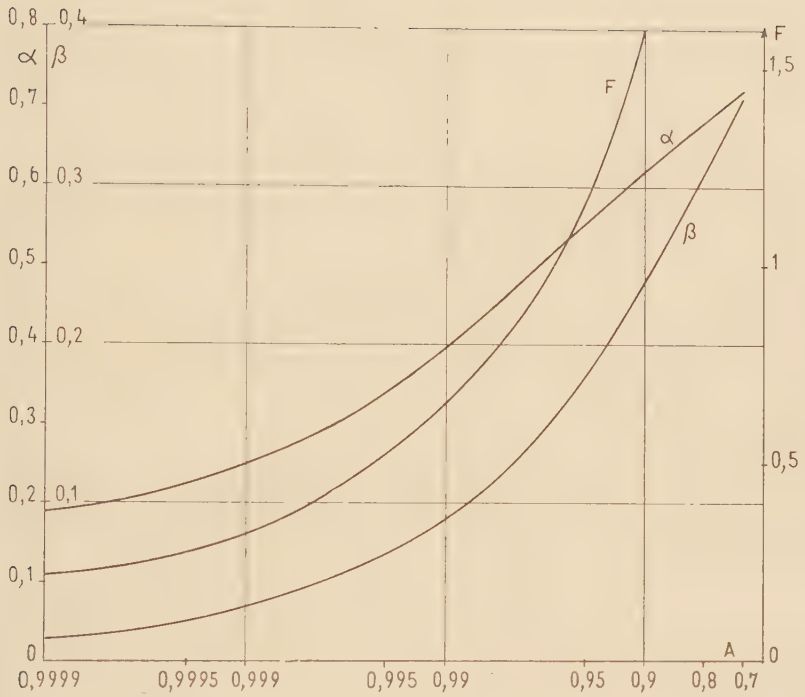


FIG. 6.1. — Valeurs limites de α, β et F en fonction de A

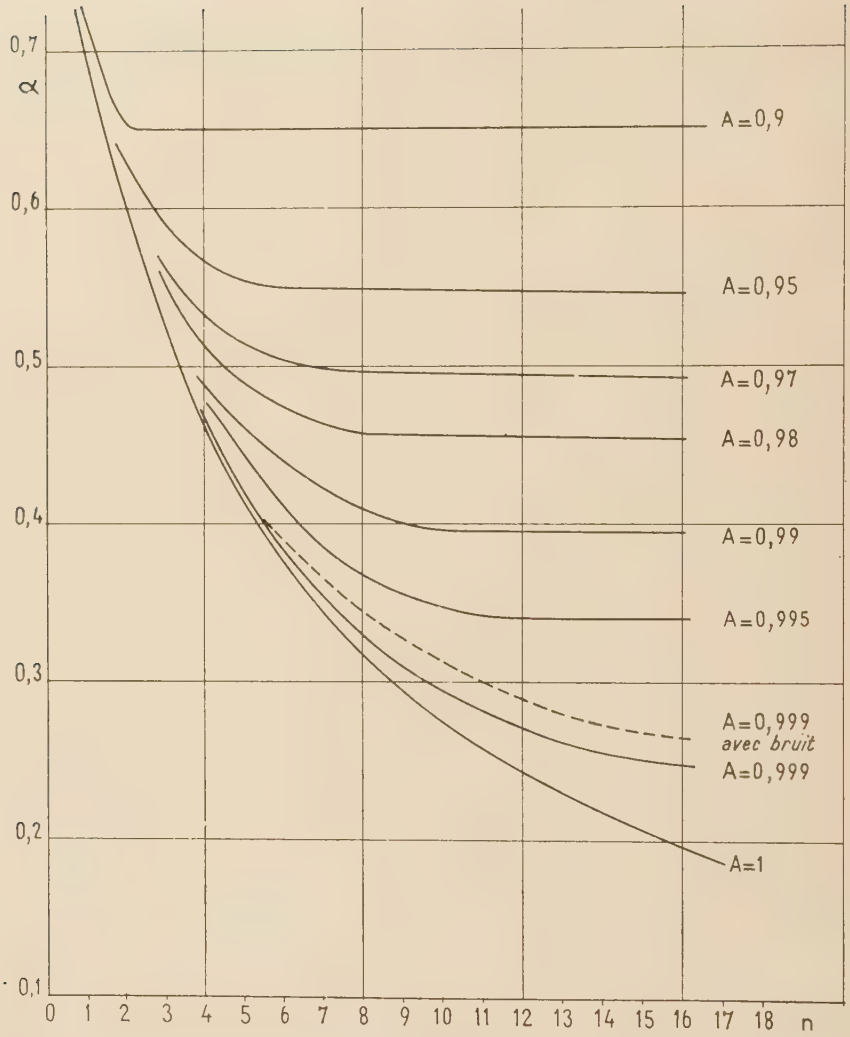


FIG. 6.2. — Variations de α en fonction de n pour diverses valeurs de A

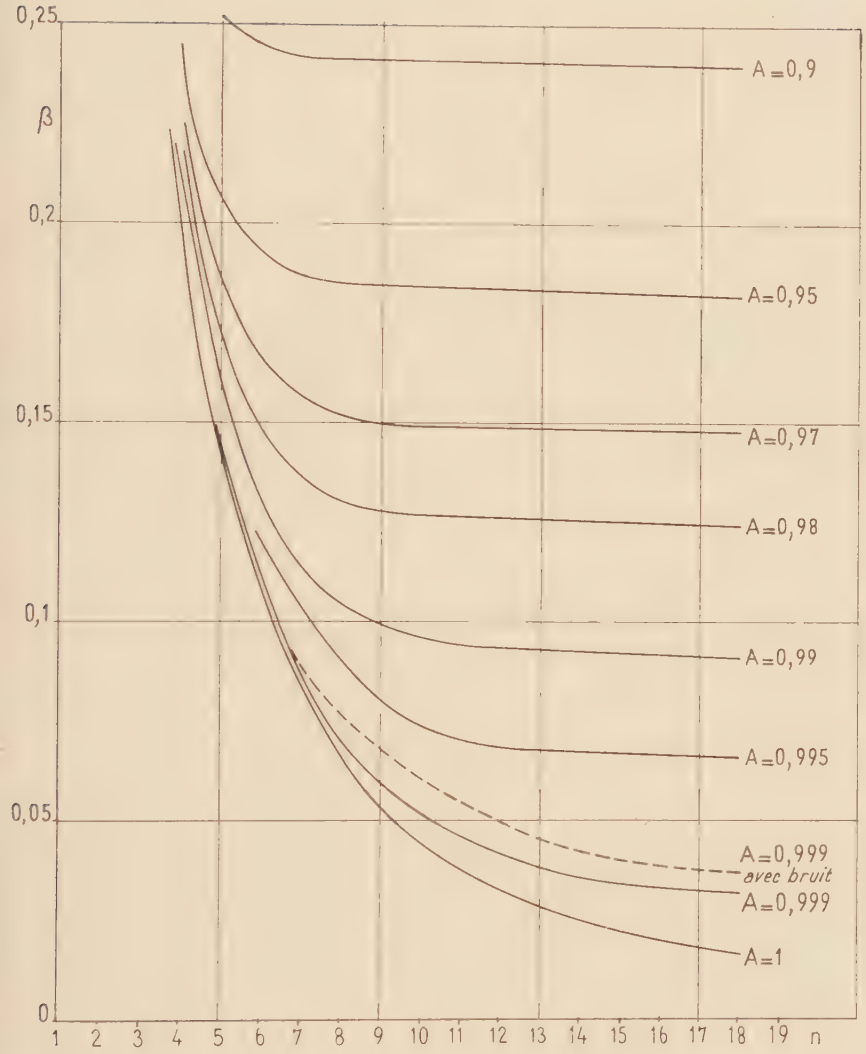


FIG. 6.3. — Variations de β en fonction de n pour diverses valeurs de A

6.3.1. Valeur limite de F.

Pour une trajectoire rectiligne sans possibilité de bifurcation, la dimension de la fenêtre se réduirait, à la limite, à $3\sigma_n$. On peut prendre le critère d'optimisation suivant : pour un tronçon à vitesse constante assez long la fenêtre limite ne sera pas majorée de plus de 20 %, c'est-à-dire $\sqrt{1 + F} = 1{,}2$ et $F = 0{,}44$; ceci est obtenu en choisissant $0{,}997 < A < 0{,}998$; la limite est effectivement atteinte pour 10 mesures consécutives sans bifurcation.

6.3.2. Valeurs limites de α et β.

On peut estimer que les tronçons rectilignes à vitesse constante ont une durée moyenne d'environ 10 périodes d'échantillonnage. Nous pouvons désirer que pour une évolution à vitesse constante ayant cette durée moyenne les coefficients α et β correspondent sensiblement à ceux du chapitre II.

Les valeurs de α et β seront mémorisées dans le correcteur avec un certain nombre de chiffres significatifs (pour des raisons d'encombrement, on se limitera en général à 6 digits binaires). Nous pouvons donc choisir pour A la valeur qui majore d'un digit (soit 1/64) au maximum les coefficients α_{10} et β_{10}.

Sur α nous trouvons :
- — en absence de bruit $A = 0{,}998$;
- — en présence de bruit $A = 0{,}999$.

Sur β nous trouvons :
- — en absence de bruit $A = 0{,}997$;
- — en présence de bruit $A = 0{,}999$.

6.3.3. Choix de A.

A ce stade, il semble donc intéressant de choisir $A = 0{,}999$. D'ailleurs, sur la figure 6.1, on voit qu'une nouvelle augmentation de A provoque un gain très faible sur les valeurs limites des paramètres. Nous préciserons cette donnée en étudiant la réponse à un échelon de vitesse.

§ 6.1. Réponse à un échelon de vitesse pour $A = 0{,}999$

Le système n'est pas linéaire; la réponse dépend de l'amplitude de l'échelon appliqué.

Les divers cas sont rapportés sur les figures 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7. Nous portons sur ces courbes les écarts avec les valeurs réelles et la dimension des fenêtres de bruit : $3\sqrt{F}$ sur la position prédite; $3\sqrt{R}$ sur la position corrigée; $3\sqrt{G}$ sur la vitesse corrigée. Les valeurs de α et β sont liées aux valeurs de F et G.

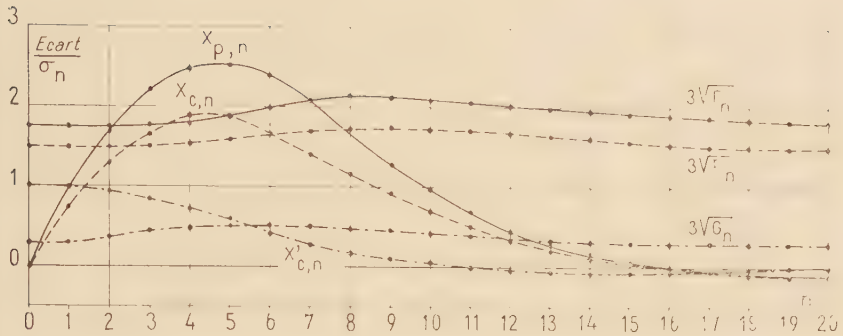


FIG. 6.4. — Correcteur sans estimation de γ (A = 0,999; δ = 1)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{1\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

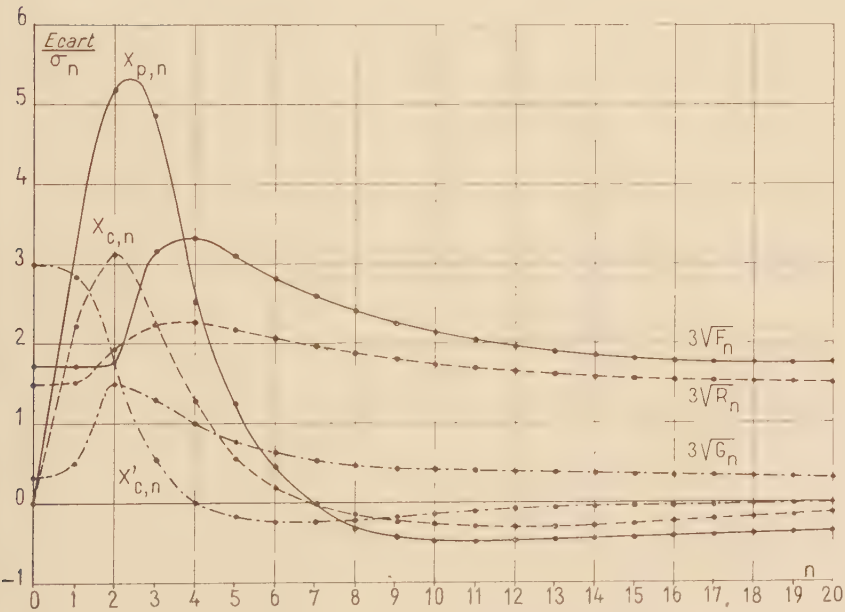


FIG. 6.5. — Correcteur sans estimation de γ (A = 0,999; δ = 1)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{3\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

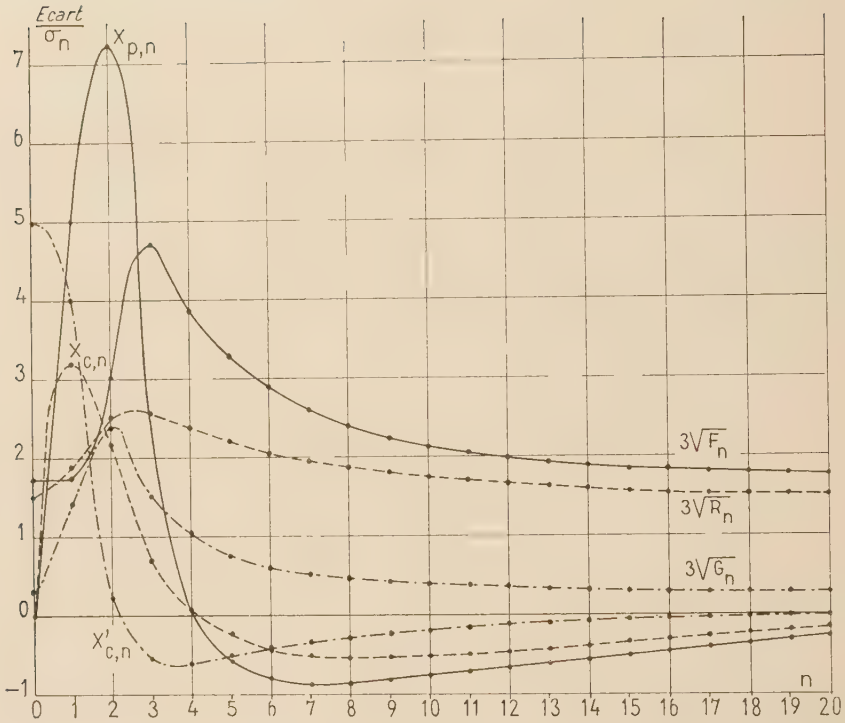


FIG. 6.6. — Correcteur sans estimation de γ ($A = 0{,}999$; $\delta = 1$)

Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{5\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

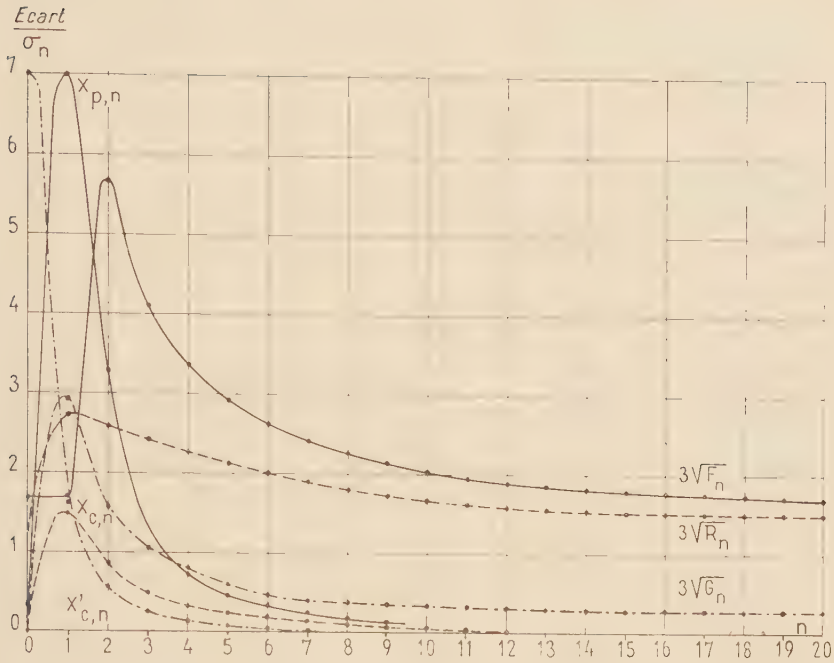


Fig. 6.7. — Correcteur sans estimation de γ (A = 0,999; δ = 1)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

6.4.1. Remarques générales.

Le premier écart sur la position prédite est évidemment égal à l'amplitude de l'échelon (le régime transitoire d'un échelon antérieur est supposé terminé).

A l'instant où est appliqué l'échelon (20e mesure), les paramètres α, β et F ont atteint leur valeur limite.

Pour un écart faible, il n'y a pratiquement pas d'ouverture de la fenêtre; tant que $\frac{X_p - X_n}{3\,s_n}$ est inférieur à 1, la probabilité de bifurcation est très faible.

6.4.2. Échelon de vitesse de faible amplitude (fig. 6.4).

Le seuil d'ouverture n'est pratiquement jamais atteint. La piste sort de la fenêtre après plusieurs mesures et reste en dehors de celle-ci pendant 5 mesures. Le régime transitoire est très long mais la position prédite s'écarte de la fenêtre de bruit d'une quantité inférieure à σ_n. En présence de bruit on restera donc pratiquement toujours à l'intérieur de la fenêtre de bruit; lors d'un essai en présence de bruit, l'écart sur la position prédite n'a jamais dépassé $2\sigma_n$.

Pour diminuer le régime transitoire, on peut suggérer l'utilisation d l'erreur intégrale [26-28] qui consiste à majorer l'écart d'une fraction d l'écart précédent :

$$E_n = (X_n - X_{p,\,n-1}) + KE_{n-1}.$$

Quand plusieurs écarts consécutifs sont de même signe, la probabilit d'une bifurcation est plus grande. L'utilisation de E_n correspond à une majora tion vers le seuil de détection.

6.4.3. Échelon de vitesse d'amplitude moyenne.

Le seuil est alors atteint en une ou deux mesures. On s'écarte beaucou plus de la fenêtre, mais on reste beaucoup moins longtemps en dehors Toutefois l'erreur devient importante (supérieure à l'amplitude de l'échelon à l'instant de l'ouverture de la fenêtre, la correction est trop forte et on obtien un dépassement; il serait encore plus marqué en utilisant l'erreur intégrale

6.4.4. Échelon de vitesse de grande amplitude.

Dès la première mesure la bifurcation est détectée, α et β reprennen des valeurs voisines de 1 ($\alpha \simeq 0{,}8$, $\beta \simeq 0{,}8$); le passé n'est plus significatif La correction est immédiate; la fenêtre de bruit redevient grande. On s comporte à peu près comme pour une initialisation.

6.4.5. Conclusion.

Les résultats sont les mêmes si l'on s'intéresse à la position corrigée et à la vitesse corrigée.

Les réponses transitoires sont satisfaisantes; les écarts importants son toujours de courte durée.

En présence de manques, les conditions seront évidemment plus difficiles

§ 6.5. **Réponse à l'échelon de vitesse pour diverses valeurs de A**

Pour cette étude, nous avons choisi un échelon de vitesse d'amplitud moyenne $\left(\frac{3\,\sigma_n}{T_n}\right)$. L'échelon se produit après 20 mesures; F_{20} représente don la valeur limite de F.

Nous avons tracé trois réseaux de courbes :

Figure 6.8. Position prédite : Valeurs des 2e, 3e, 4e, 5e, 6e écarts en fonc tion de A, et valeurs de $3\sqrt{F_{21}}$, $3\sqrt{F_{22}}$, $3\sqrt{F_{23}}$, $3\sqrt{F_{24}}$. Le premier écart es constant et égal à la hauteur de l'échelon de vitesse.

Figure 6.9. Position corrigée : Valeurs des 1er, 2e, 3e, 4e, 5e écarts, et d

$$3\sqrt{R_{20}},\ 3\sqrt{R_{21}},\ 3\sqrt{R_{22}},\ 3\sqrt{R_{23}},\ 3\sqrt{R_{24}}.$$

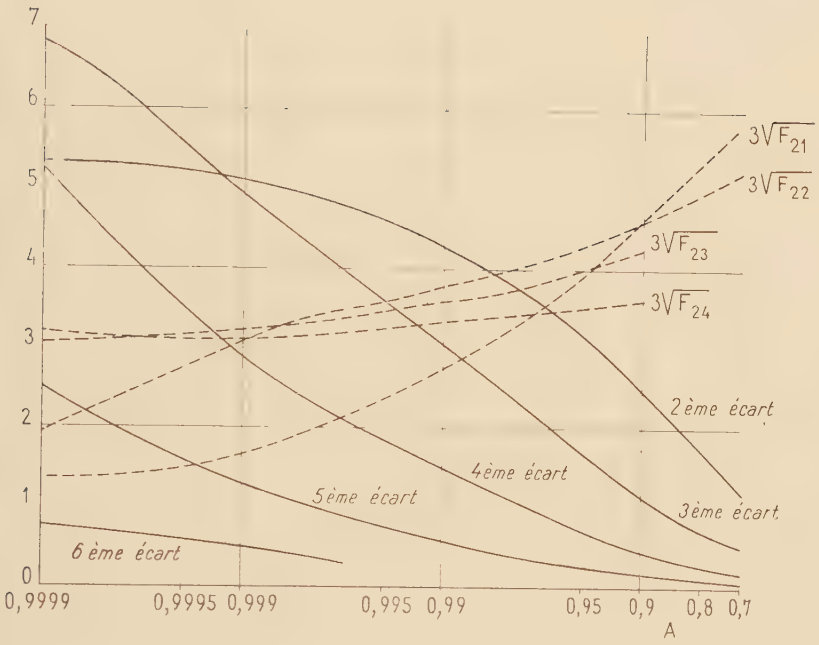


FIG. 6.8. — Réponse à un échelon de vitesse de $\frac{3\,\sigma_n}{T_n}$

Position prédite : premiers écarts $X_n - X_{p,n}$ et premières fenêtres de bruit $3\sqrt{F}$ en fonction de A.

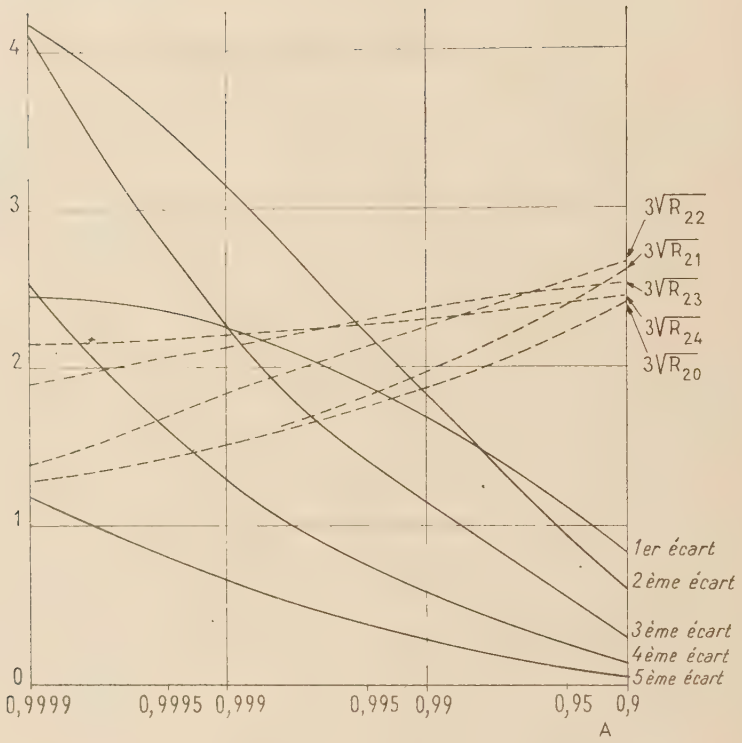


FIG. 6.9. — Réponse à un échelon de vitesse de $\frac{3\,\sigma_n}{T_n}$

Position corrigée: premiers écarts $X_n - X_{c,n}$ et premières fenêtres de bruit $3\sqrt{R}$ en fonctio de A.

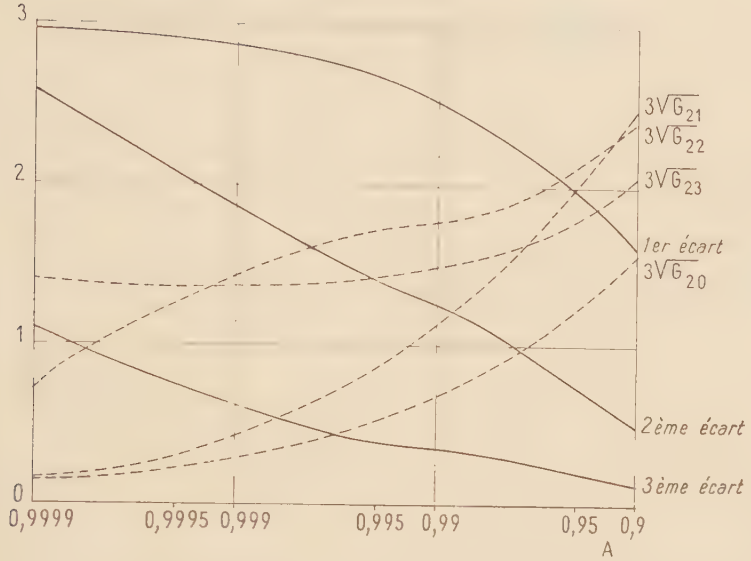


FIG. 6.10. — Réponse à un échelon de vitesse de $\frac{3\,\sigma_n}{T_n}$

Vitesse corrigée : premiers écarts $X'_{r,n} - X'_{c,n}$ et premières fenêtres de bruit $3\sqrt{G}$ en fonction de A

Figure 6.10. Vitesse corrigée : Valeurs des 1er, 2e, 3e écarts, et de

$$3\sqrt{G_{20}},\ 3\sqrt{G_{21}},\ 3\sqrt{G_{22}},\ 3\sqrt{G_{23}}.$$

Nous étudions ces courbes suivant un certain nombre de critères destinés à préciser la qualité de la réponse transitoire.

6.5.1. Étude de l'écart maximal.

Quelle que soit la valeur de A, l'écart maximal sur la position prédite est toujours le 2e ou le 3e. Il est d'autant plus important que A est proche de 1, et le régime transitoire en sera d'autant moins bon.

On remarque que pour A légèrement supérieur à 0,999, le 3e écart sur la position prédite devient plus important que le 2e : le seuil de détection est donc pratiquement atteint un coup plus tard.

6.5.2. Réouverture maximale des fenêtres de bruit.

Le résultat optimal dans ce sens est obtenu pour la valeur de A qui donnera une réouverture maximale plus petite. Les courbes montrent que, pour cela, on aurait tendance à augmenter la valeur de A.

Pour F, la valeur la plus favorable est A = 0,9995, mais la diminution n'est plus sensible à partir de 0,999.

Pour R, le minimum se situe sensiblement à la même valeur.

Pour G : G_{23} présente un minimum pour A = 0,9995, mais G_{22} est infé
rieur à G_{23} uniquement à partir de A = 0,9992.
Ce critère nous confirme assez bien le choix de A = 0,999.

6.5.3. Nombre de coups en dehors de la fenêtre de bruit.

Le tableau 6.3 donne la valeur maximale de A pour laquelle le nombr
de coups en dehors de la fenêtre est 0, 1, 2 ou 3.
La valeur A = 0,999 correspond pratiquement à deux mesures en dehor
de la fenêtre de bruit pour les positions prédite et corrigée et pour la vitess
corrigée.

TABLEAU 6·3.

NOMBRE DE COUPS EN DEHORS DE LA FENÊTRE DE BRUIT
POUR PLUSIEURS VALEURS DE A

Nombre de coups en dehors de la fenêtre	Valeur maximale de A		
	Pour la position prédite	Pour la position corrigée	Pour la vitesse corrigée
0	0,97	0,995	0,95
1	0,995	0,995	0,997
2	0,9993	0,9985	
3		0,9998	

6.5.4. Durée du régime transitoire.

Nous pouvons caractériser le régime transitoire par le temps nécessai
pour que les écarts soient inférieurs au tiers de l'échelon appliqué. Les valeu
ainsi calculées sont rassemblées dans le tableau 6.4. Les fractions de périod
d'échantillonnage ont été calculées en interpolant sur les écarts à deux instan
d'échantillonnage successifs.

TABLEAU 6·4.

DURÉE DU RÉGIME TRANSITOIRE
EN FRACTIONS DE PÉRIODE D'ÉCHANTILLONNAGE

A	Position prédite	Position corrigée	Vitesse corrigée
0,9	3,20	0,91	1,5
0,95	3,72	1,5	1,76
0,97	3,95	2,4	1,94
0,98	4,28	2,78	2,07
0,99	4,56	3,24	2,28
0,995	4,78	3,6	2,37
0,999	5,33	4,5	2,7
0,9995	5,6	4,76	2,81
0,9999	5,86	5,5	3

6.5.5. Conclusion.

Nous avons mené des études analogues pour des échelons de vitesse l'amplitude plus grande $\left(\frac{5\,\sigma_n}{T_n}\right.$ et $\left.\frac{7\,\sigma_n}{T_n}\right)$. En voici les conclusions :

1° Échelon de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$: le seuil de détection est toujours atteint dès la première mesure et l'on aura intérêt à choisir la valeur de A la plus grande possible;

2° Échelon de $\frac{5\,\sigma_n}{T_n}$: la plus faible réouverture se produit pour A = 0,995. Pour les valeurs de A plus élevées, il apparaît très rapidement un dépassement; celui-ci est minimal pour A = 0,999.

En définitive, nous retiendrons pour la suite la valeur A = 0,999.

§ 6.6. **Influence de la variation des dimensions de la fenêtre**

Au chapitre IV, nous avions vu qu'en fait, il fallait modifier les dimensions de la fenêtre de bruit, en fonction des possibilités d'évolution : en particulier, si $\frac{\Gamma T_n^2}{2\,s_n}$ est petit, il faut prendre $\delta > 1$, et vice versa.

Nous avons donc repris l'étude de la réponse à l'échelon de $\frac{1\,\sigma_n}{T_n}$ (seul cas o $\frac{\Gamma T_n^2}{2\,s_n}$ est petit) avec $\delta = 1{,}3$, et à l'échelon de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$ (cas où $\frac{\Gamma T_n^2}{2\,s_n}$ est grand avec $\delta = 0{,}8$.

Nous ne donnons pas ici la courbe pour l'échelon de $\frac{1\,\sigma_n}{T_n}$ où les différence sont négligeables par rapport au cas précédent; d'ailleurs, le fait d'agrandi la fenêtre fait tendre la probabilité *à posteriori* H de ne pas avoir de bifurca tion vers la probabilité *a priori* A.

La figure 6.11 donne la réponse à l'échelon de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$; $\delta = 0{,}8$ étant plus peti que 1, la variation de H par rapport à A sera plus importante et la réactio plus rapide. Le gain en temps de réponse est très faible car, dès la détectio de la bifurcation, on rentre dans la fenêtre. Par contre, on l'ouvre encore u peu plus et on augmente ainsi la probabilité de fausse détection.

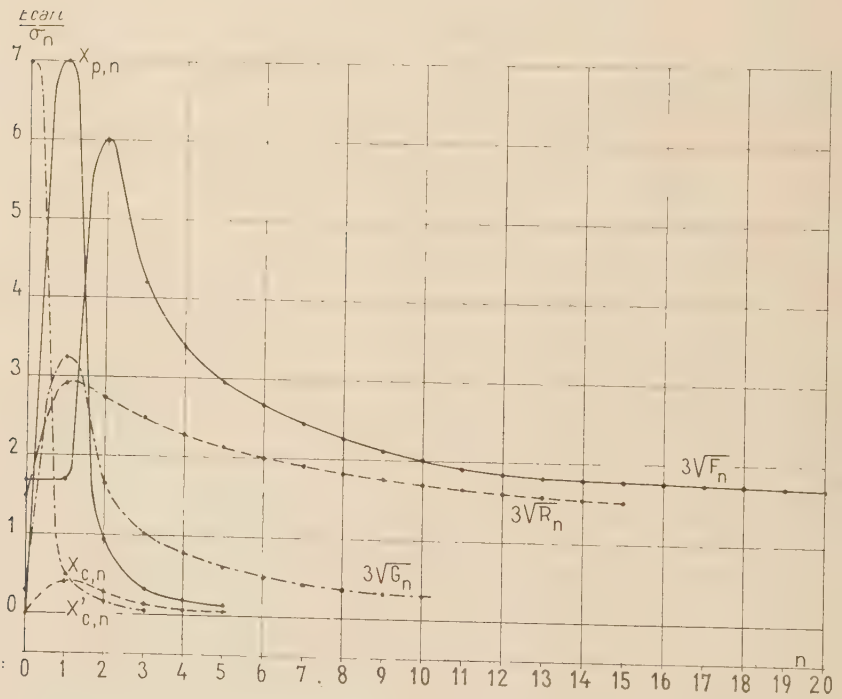


FIG. 6.11. — Correcteur sans estimation de γ (A = 0,999; $\delta = 0{,}8$)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de brui correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

CHAPITRE VII

PERFORMANCES DU CORRECTEUR AVEC ESTIMATION DE L'ACCÉLÉRATION

§ 7.0. **Introduction**

Ce correcteur nécessite la connaissance de $E(x)$, $E(w)$, $E(x^2)$, $E(w^2)$ et $E(xw)$. Nous commençons par la tabulation systématique de ces quantités et leur pproximation par des polynômes simples; en fait, leur évaluation fait intervenir l'angle de la trajectoire avec la direction Ox suivant laquelle on effectue es calculs; pour simplifier les résultats et surtout rendre la poursuite suivant es deux axes identique, nous confondons, pour ces tabulations, l'axe Ox vec la normale à la trajectoire.

Nous vérifierons ensuite les performances du système de la même façon u'au chapitre VI.

§ 7.1. **Expressions mathématiques de $E(x)$, $E(w)$, $E(x^2)$, $E(w^2)$ et $E(xw)$**

7.1.1. Calcul de $p(\gamma \text{ et } t|X_n)$.

La valeur de l'accélération prise à un instant de l'intervalle T_n est indépendante de l'instant où celle-ci commence à agir.

Puisque $x = \frac{\gamma t^2}{2}$ et $w = \gamma t$, il nous faut calculer

$$p(\gamma \text{ et } t\ X_n) = \frac{p(X_n \mid \gamma \text{ et } t)\, p(\gamma)\, p(t)}{p(X_n)}.$$

Nous ne cherchons cette quantité que pour les cas d'évolution; il ne faudra onc considérer pour $p(X_n)$ que la quantité (voir 4.4.3) :

$$(X_n) = \frac{1}{\Gamma T_n s_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \left(\sqrt{\left| \frac{\Gamma}{2 X_1} \right|} - \frac{1}{T_n} \right) \exp - \frac{(X_n - X_1)^2}{2 s_n^2} dX_1 = \frac{J}{s_n \sqrt{2\pi}}.$$

Par ailleurs $p(\gamma) = \frac{1}{2\Gamma}$ et $p(t) = \frac{1}{T_n}$.

$p(X_n\ \gamma$ et $t)$ représente la probabilité de X_n lorsque l'étape due à l'évolution est terminée et a donné la valeur $x = \frac{\gamma t^2}{2}$;

$$p(X_n \mid \gamma \text{ et } t) = \frac{1}{s_n\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}.$$

Après report, $p(\gamma$ et $t\ X_n) = \frac{1}{2\Gamma T_n J} \exp - \frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}$, pour toutes valeur de $-\Gamma < \gamma < +\Gamma$ et de $0 < t < T_n$.

7.1.2. Calcul de $E(x)$.

$$E(x) = \int_{-\Gamma}^{+\Gamma} \int_{0}^{T_n} \frac{\gamma t^2}{2} \cdot \frac{1}{2\Gamma T_n J} \exp - \frac{\left(X_n - \frac{\gamma t^2}{2}\right)}{2 s_n^2} . dt . d\gamma.$$

Effectuons le changement de variable $x = \frac{\gamma t^2}{2}$ en considérant γ comme variable; $dx = \frac{t^2}{2} d\gamma$; les limites d'intégration deviennent $-\frac{\Gamma t^2}{2}$ et $+\frac{\Gamma t^2}{2}$

$$E(x) = \int_{0}^{T_n} \int_{-\frac{\Gamma t^2}{2}}^{+\frac{\Gamma t^2}{2}} \frac{x}{2\Gamma T_n J} \exp - \frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2} \cdot \frac{2\, dx\, dt}{t^2}.$$

L'aire d'intégration est représentée par la figure 7.0. On peut changer l'ordre des intégrations à condition d'en modifier les bornes.

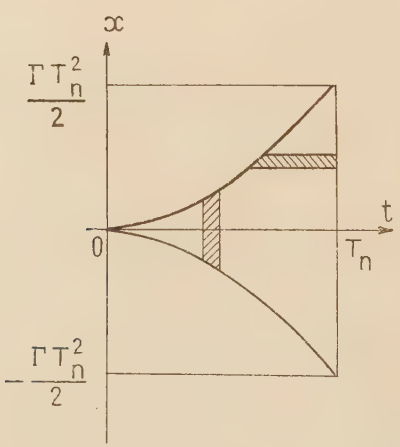


Fig. 7.0. — Aire d'intégration

On intégrera d'abord par rapport à t,

$$\text{de } \sqrt{\left|\frac{2x}{\Gamma}\right|} \text{ à } T_n;$$

puis par rapport à x,

$$\text{de } -\frac{\Gamma T_n^2}{2} \text{ à } +\frac{\Gamma T_n^2}{2}.$$

$$E(x) = \frac{1}{\Gamma T_n J}\int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} x \exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\, dx \int_{\sqrt{\left|\frac{2x}{\Gamma}\right|}}^{T_n} \frac{dt}{t^2}.$$

$$E(x) = \frac{1}{\Gamma T_n J}\int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \left(\sqrt{\left|\frac{\Gamma}{2x}\right|} - \frac{1}{T_n}\right) x \exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\, dx.$$

Posons

$$B = \frac{\Gamma T_n^2}{2 s_n}, \quad Y = \frac{x}{s_n}, \quad A = \frac{X_n}{s_n}.$$

$$E(x) = \frac{s_n}{J}\int_{B}^{+B} Y \left(\sqrt{\frac{1}{4B|Y|}} - \frac{1}{2B}\right) \exp -\frac{1}{2}(A - Y)^2\, dY.$$

On peut décomposer en deux intégrales telles que $E(x) = \frac{s_n}{J}(J_1 + J_2)$ avec :

$$J_1 = \int_{-B}^{+B} -\frac{Y}{2B} \exp -\frac{1}{2}(A - Y)^2\, dY.$$

En posant : $u = \frac{A - Y}{\sqrt{2}}$,

$$J_1 = \frac{1}{2B}\int_{\frac{A+B}{\sqrt{2}}}^{\frac{A-B}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}\,(A - u\sqrt{2}) \exp -u^2\, du$$

$$= \frac{1}{2B}\left\{\int \frac{A\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp -u^2\, du - \int 2u \exp -u^2 du\right\},$$

soit

$$J_1 = \frac{A}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{Erf}\frac{A - B}{\sqrt{2}} - \operatorname{Erf}\frac{A + B}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2B}\left[\exp -\frac{(A - B)^2}{2} - \exp -\frac{(A + B)^2}{2}\right].$$

$$J_2 = \int_{-B}^{+B} Y \sqrt{\frac{1}{4B|Y|}} \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY.$$

En posant $u = \sqrt{\frac{Y}{B}}$ pour $0 < Y < B$, et $u = \sqrt{-\frac{Y}{B}}$ pour $-B < Y < 0$

$$J_2 = \int_0^1 Bu^2 \exp -\frac{1}{2}(A - Bu^2)^2\, du + \int_1^0 Bu^2 \exp -\frac{1}{2}(A + Bu^2)^2\, du.$$

7.1.3. Calcul de $E(x^2)$.

On peut effectuer les mêmes calculs que précédemment; lors du changement de variable, la quantité à intégrer se trouve simplement multipliée par $\frac{s_n^2}{J}$

$$E(x^2) = \frac{s_n^2}{J}\int_{-B}^{+B} Y^2 \left(\sqrt{\frac{1}{4B|Y|}} - \frac{1}{2B}\right) \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY.$$

On peut décomposer en deux intégrales telles que $E(x^2) = \frac{s_n^2}{J}(J_3 + J$ avec :

$$J_3 = \int_{-B}^{+B} -\frac{Y^2}{2B} \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY.$$

En posant : $u = \frac{A-Y}{\sqrt{2}}$,

$$J_3 = \frac{1}{2B}\int_{\frac{A+B}{\sqrt{2}}}^{\frac{A-B}{\sqrt{2}}} (A^2 - 2Au\sqrt{2} + 2u^2)\sqrt{2} \exp -u^2\, du.$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$\int 2u^2\sqrt{2} \exp -u^2\, du = -\left[u\sqrt{2} \exp -u^2\right]_{\frac{A+B}{\sqrt{2}}}^{\frac{A-B}{\sqrt{2}}} + \int \sqrt{2} \exp -u^2\, du,$$

d'où :

$$J_3 = \frac{1}{2B}\Big[(A+B) \exp -\frac{(A+B)^2}{2} - (A-B) \exp -\frac{(A-B)^2}{2}$$
$$+ (A^2+1)\sqrt{2} \exp -u^2\, du - \int 4Au \exp -u^2\, du$$

$$J_3 = \frac{1}{2B}\Big[(A+B) \exp -\frac{(A-B)^2}{2} + (B-A) \exp -\frac{(A+B)^2}{2}$$
$$+ (A^2+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{Erf}\frac{A-B}{\sqrt{2}} - \mathrm{Erf}\frac{A+B}{\sqrt{2}}\right.$$

$$J_4 = \int_{-B}^{+B} Y^2 \sqrt{\frac{1}{4B|Y|}} \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY.$$

Avec le même changement de variable que pour J_2 :

$$J_4 = \int_0^1 B^2 u^4 \exp -\frac{1}{2}(A - Bu^2)^2\, du - \int_1^0 B^2 u^4 \exp -\frac{1}{2}(A + Bu^2)^2\, du.$$

7.1.4. Calcul de $E(w)$.

$$w = \gamma t\,;\ E(w) = \int_{-\Gamma}^{+\Gamma} \int_0^{T_n} \gamma t \cdot \frac{1}{2\Gamma T_n J} \exp -\frac{\left(X_n - \frac{\gamma t^2}{2}\right)^2}{2 s_n^2}\, dt\, d\gamma.$$

En effectuant le changement de variable $x = \frac{\gamma t^2}{2}$,

$$E(w) = \int_0^{T_n} \int_{-\frac{\Gamma t^2}{2}}^{+\frac{\Gamma t^2}{2}} \frac{2x}{t} \cdot \frac{1}{2\Gamma T_n J} \exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2} \cdot \frac{2\, dx\, dt}{t^2}.$$

En changeant l'ordre des intégrations :

$$E(w) = \int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \frac{2x}{\Gamma T_n J} \exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\, dx \int_{\sqrt{\left|\frac{2x}{\Gamma}\right|}}^{T_n} \frac{dt}{t^3}$$

$$= \frac{1}{\Gamma T_n J} \int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \left(\left| \frac{\Gamma}{2x} \right| - \frac{1}{T_n^2} \right) x \exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma T_n}{J} \int_{-B}^{+B} \left(\frac{1}{4B|Y|} - \frac{1}{4B^2} \right) Y \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY.$$

On peut décomposer en deux intégrales :

$$J_5 = \int_{-B}^{+B} -\frac{Y}{4B^2} \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY = \frac{J_1}{2B}.$$

$$J_6 = \int_{-B}^{+B} \frac{Y}{4B|Y|} \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY.$$

Si $0 < Y < B$, on peut simplifier par Y ; si $-B < Y < 0$, il faut changer le signe en simplifiant.

$$J_6 = \frac{1}{4B}\left[\int_0^B \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY - \int_{-B}^0 \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\, dY \right].$$

En posant $u = \frac{A - Y}{\sqrt{2}}$,

$$J_6 = \frac{1}{4B}\left[-\int_{\frac{A}{\sqrt{2}}}^{\frac{A-B}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}\exp - u^2\,du + \int_{\frac{A+B}{\sqrt{2}}}^{\frac{A}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}\exp - u^2\,du \right]$$

$$J_6 = \frac{1}{4B}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\operatorname{Erf}\frac{A}{\sqrt{2}} - \operatorname{Erf}\frac{A-B}{\sqrt{2}} + \operatorname{Erf}\frac{A}{\sqrt{2}} - \operatorname{Erf}\frac{A+B}{\sqrt{2}}\right].$$

En définitive :

$$E(w) = \frac{\Gamma T_n}{4BJ}\left[\frac{1}{B}\left[\exp - \frac{(A-B)^2}{2} - \exp - \frac{(A+B)^2}{2}\right] + 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Erf}\frac{A}{\sqrt{2}}\right.$$
$$\left. + \frac{(A-B)}{B}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Erf}\frac{A-B}{\sqrt{2}} - \frac{(A+B)}{B}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Erf}\frac{A+B}{\sqrt{2}}\right]$$

7.1.5. Calcul de $E(w^2)$.

$$E(w^2) = \int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \frac{4x^2}{\Gamma T_n J}\exp - \frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\,dx \int_{\sqrt{\left|\frac{2x}{\Gamma}\right|}}^{T_n} \frac{dt}{t^4}$$

$$= \frac{1}{\Gamma T_n J}\int_{-\frac{\Gamma T_n^2}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^2}{2}} \frac{4x^2}{3}\left(\left|\frac{\Gamma}{2x}\right|^{3/2} - \frac{1}{T_n^3}\right)\exp - \frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\,dx$$

$$= \frac{4\Gamma^2 T_n^2}{3J}\int_{-B}^{+B} Y^2\left[\left(\frac{1}{4B|Y|}\right)^{3/2} - \frac{1}{8B^3}\right]\exp - \frac{1}{2}(A - Y)^2\,dY.$$

On peut décomposer en deux intégrales :

$$J_7 = \int_{-B}^{+B} - \frac{Y^2}{8B^3}\exp - \frac{1}{2}(A - Y)^2\,dY = \frac{J_3}{4B^2}.$$

$$J_8 = \int_{-B}^{+B} \frac{Y^2}{(4B|Y|)^{3/2}}\exp - \frac{1}{2}(A - Y)^2\,dY$$

$$= \int_0^B \frac{Y}{4B\sqrt{4B|Y|}}\exp - \frac{1}{2}(A - Y)^2\,dY - \int_{-B}^0 \frac{Y}{4B\sqrt{4B|Y|}}$$

$$\exp - \frac{1}{2}(A - Y)^2\,dY$$

$$= \int_0^1 \frac{Bu^2}{4B}\exp - \frac{1}{2}(A - Bu^2)^2\,du - \int_1^0 \frac{Bu^2}{4B}\exp - \frac{1}{2}(A + Bu^2)^2\,du,$$

différent de $\frac{J_2}{4B}$.

En définitive :

$$\mathrm{E}(w^2) = \frac{\Gamma^2 T_n^3}{6 B^3 J}\left[(A+B)\exp -\frac{(A-B)^2}{2} + (B-A)\exp -\frac{(A+B)^2}{2} + (A^2+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{Erf}\frac{A-B}{\sqrt{2}} - \mathrm{Erf}\frac{A+B}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{\Gamma^2 T_n^3}{3 BJ} J_8.$$

7.1.6. Calcul de E(xw).

$$\mathrm{E}(xw) = \int_{-\frac{\Gamma T_n^3}{2}}^{+\frac{\Gamma T_n^3}{2}} \frac{2x^2}{\Gamma T_n J}\exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\,dx \int_{\sqrt{\left|\frac{2x}{\Gamma}\right|}}^{T_n} \frac{dt}{t^3}$$

$$= \frac{1}{\Gamma T_n J}\int \left(\left|\frac{\Gamma}{2x}\right| - \frac{1}{T_n^2}\right) x^2 \exp -\frac{(X_n - x)^2}{2 s_n^2}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma^2 T_n^3}{2J}\int_{-B}^{+B}\left(\frac{1}{4B|Y|} - \frac{1}{4B^2}\right)\frac{Y^2}{B}\exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\,dY.$$

On peut décomposer en deux intégrales :

$$J_9 = \int_{-B}^{+B} -\frac{1}{4B^3} Y^2 \exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\,dY = \frac{J_3}{2B^2}.$$

$$J_{10} = \int_0^B \frac{Y}{4B^2}\exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\,dY - \int_{-B}^0 \frac{Y}{4B^2}\exp -\frac{1}{2}(A-Y)^2\,dY$$

$$= -\int_{\frac{A}{\sqrt{2}}}^{\frac{A-B}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}\,(A - u\sqrt{2})}{4B^2}\exp -u^2\,du + \int_{\frac{A+B}{\sqrt{2}}}^{\frac{A}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}\,(A - u\sqrt{2})}{4B^2}\exp -u^2\,du$$

$$= \frac{A}{4B^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[2\,\mathrm{Erf}\frac{A}{\sqrt{2}} - \mathrm{Erf}\frac{A-B}{\sqrt{2}} - \mathrm{Erf}\frac{A+B}{\sqrt{2}}\right] + \frac{1}{4B^2}\left[2\exp -\frac{A^2}{2} - \exp -\frac{(A-B)^2}{2} - \exp -\frac{(A+B)^2}{2}\right].$$

En définitive :

$$\mathrm{E}(xw) = \frac{\Gamma^2 T_n^3}{2J}\left[\frac{1}{2B^2}\exp -\frac{A^2}{2} + \frac{A}{4B^3}\left[\exp -\frac{(A-B)^2}{2} - \exp -\frac{(A+B)^2}{2}\right] + \frac{A}{2B^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Erf}\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{(A^2+1-AB)}{4B^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Erf}\frac{A-B}{\sqrt{2}} - \frac{(A^2+1+AB)}{4B^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Erf}\frac{A+B}{\sqrt{2}}\right].$$

§ 7.2. Calculs numériques.

Les calculs ont été effectués sur CAB 500, en utilisant les mêmes méthod
que pour $p(\gamma = 0|X_n)$ [voir 4.5.2].

Nous donnons uniquement les résultats sous forme de courbes et l'appro
mation de celles-ci par des tronçons de droites.

7.2.1. Étude de E(x).

La figure 7.1 donne les valeurs de $\frac{E(x)}{Bs_n}$ en fonction de $\frac{X_n}{s_n}$ pour plusieu
valeurs de B.

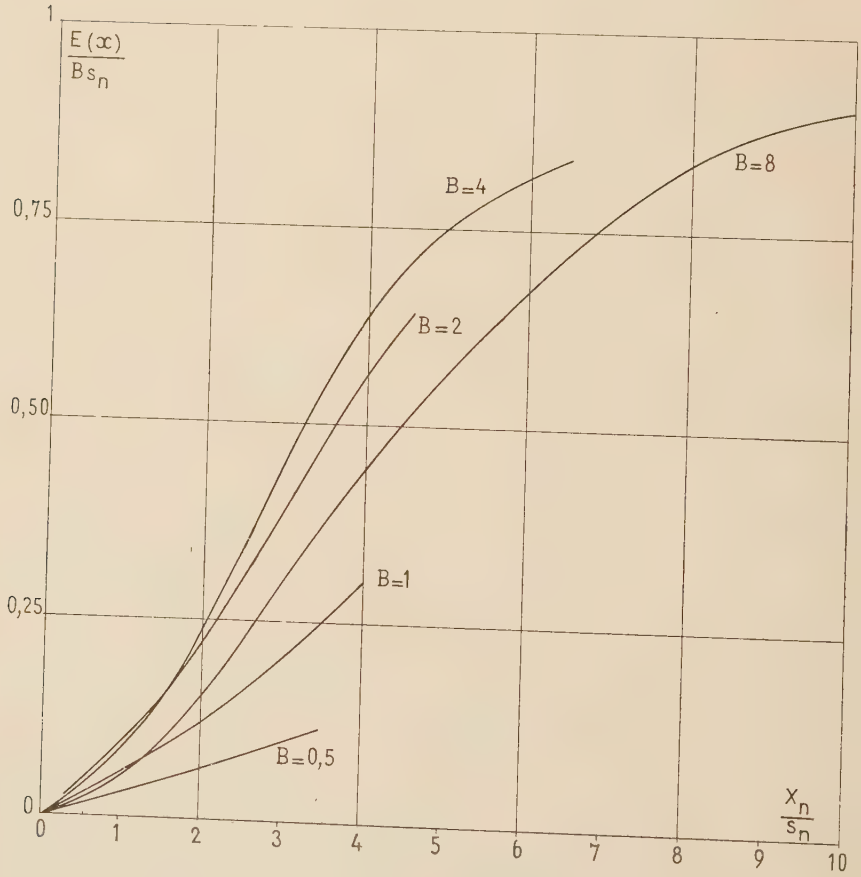


Fig. 7.1. — Étude de E(x) en fonction de l'écart mesuré

On constate qu'il y a pratiquement proportionnalité entre $E(x)$ et l'écart esuré. Pour les faibles valeurs toutefois, il y a une légère prépondérance u bruit; et les très fortes valeurs supérieures à l'écart maximal dû à γ ésultent d'une mesure fortement bruitée.

Les courbes diffèrent selon la valeur de B; comme il est impossible de xer de manière précise la valeur de B à prendre pour une piste donnée, ous adopterons $\frac{E(x)}{Bs_n} \simeq 0{,}1 \frac{X_n}{s_n}$, soit $\lambda = 0{,}1$ B.

Or $B = \frac{\Gamma T_n^2}{2 s_n} = \frac{\Gamma T_n^2}{2 \sigma_n \sqrt{1 + F_n}}$; nous prendrons pour l'ensemble des calculs $\frac{T_n^2}{s_n} = 7{,}5$; nous obtenons donc $E(x) = \lambda X_n$ avec $\lambda = \frac{0{,}75}{\sqrt{1 + F_n}}$.

7.2.2. Étude de $E(x^2)$.

En fait, nous étudions la quantité $E(x^2) - [E(x)]^2$ qui est plus significative e la précision sur l'estimation de $E(x)$.

La figure 7.2 donne les valeurs de $P = \frac{E(x^2) - [E(x)]^2}{Bs_n^2}$ en fonction de $\frac{X_n}{s_n}$.

Les résultats dépendent beaucoup plus de la valeur de B; toutefois, pour $< B < 8$, les courbes sont assez groupées, et on peut les ramener à une ourbe moyenne; l'approximation parabolique de celle-ci s'avérant difficile, ous avons préféré l'identifier à trois tronçons de droites :

$$\frac{X_n}{s_n} < 2{,}5 \qquad P = 0{,}06 + 0{,}066 \frac{X_n}{s_n}$$

$$2{,}5 < \frac{X_n}{s_n} < 4{,}5 \qquad P = 0{,}35 - 0{,}05 \frac{X_n}{s_n}$$

$$\frac{X_n}{s_n} > 4{,}5 \qquad P = 0{,}206 - 0{,}018 \frac{X_n}{s_n}.$$

n résumé,

$$\frac{E(x^2) - [E(x)]^2}{\sigma_n^2} = 7{,}5 P \sqrt{1 + F_n}.$$

7.2.3. Étude de $E(w)$.

La figure 7.3 donne les valeurs de $\frac{E(w)}{\Gamma T_n}$ en fonction de $\frac{X_n}{s_n}$. Il y a pratique- ent proportionnalité entre $E(w)$ et l'écart mesuré. Avec les mêmes hypo- èses qu'en 7.2.1, on peut prendre $E(w) = \frac{\mu}{T_n} X_n$, avec $\mu = \frac{2}{\sqrt{1 + F_n}}$.

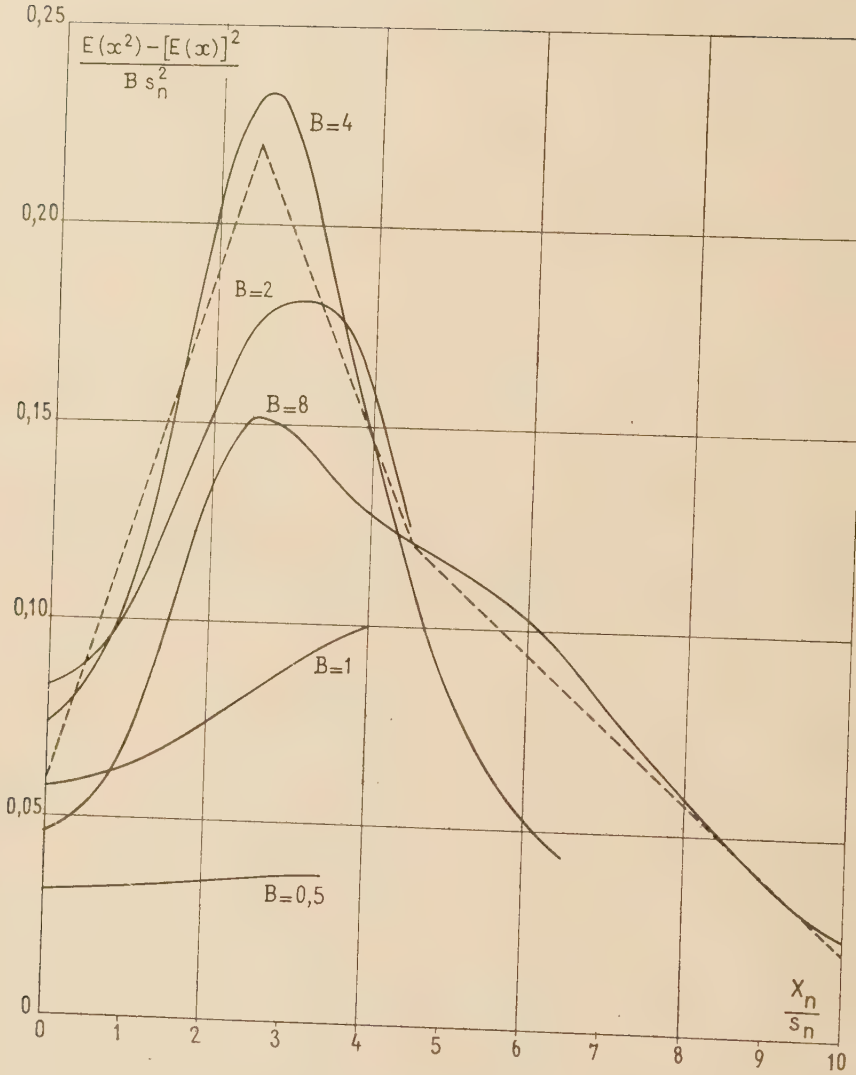


FIG. 7.2. — Étude de $E(x^2)$ en fonction de l'écart mesuré

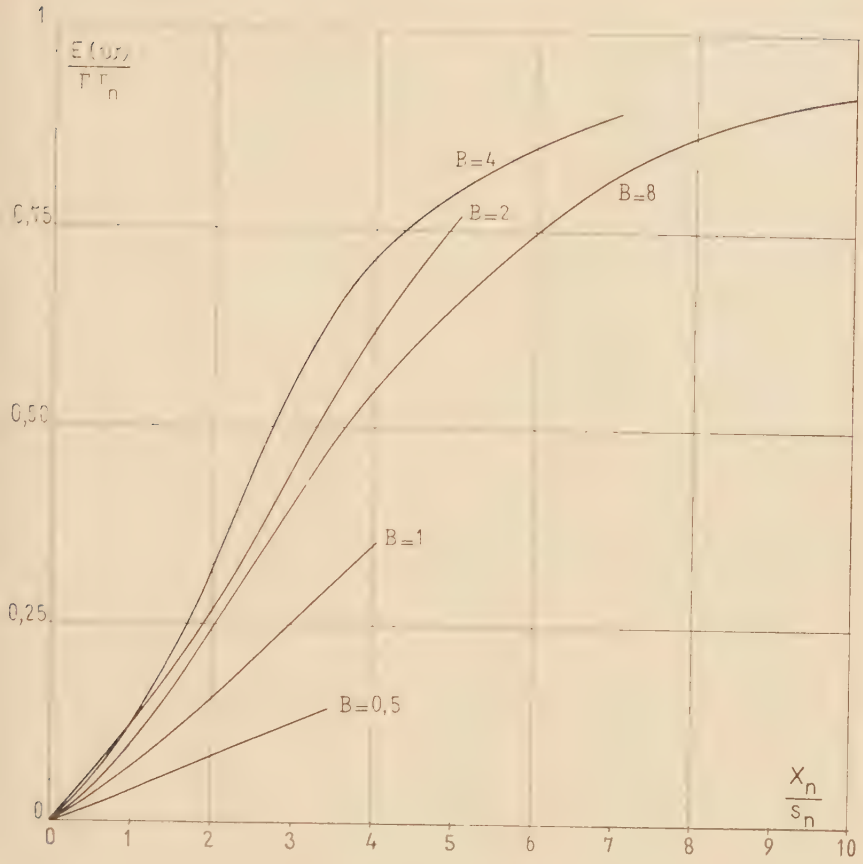


FIG. 7.3. — Étude de E(w) en fonction de l'écart mesuré

7.2.4. ÉTUDE DE E(w^2).

En fait, nous étudions $E(w^2) - [E(w)]^2$.

La figure 7.4 représente $S = B\left[\frac{E(w^2) - [E(w)]^2}{I^2 T_n^2}\right]$.

Les résultats sont analogues à ceux trouvés pour $E(x^2)$ et nous approximons S par des tronçons de droites. Pour faciliter les calculs, nous avons choisi les mêmes bornes pour limiter chaque tronçon :

$$\frac{X_n}{s_n} < 2{,}5 \qquad S = 0{,}19 + 0{,}044\,\frac{X_n}{s_n}$$

$$2{,}5 < \frac{X_n}{s_n} < 4{,}5 \qquad S = 0{,}5375 - 0{,}095\,\frac{X_n}{s_n}$$

$$\frac{X_n}{s_n} > 4{,}5 \qquad S = 0{,}128 - 0{,}004\,\frac{X_n}{s_n}.$$

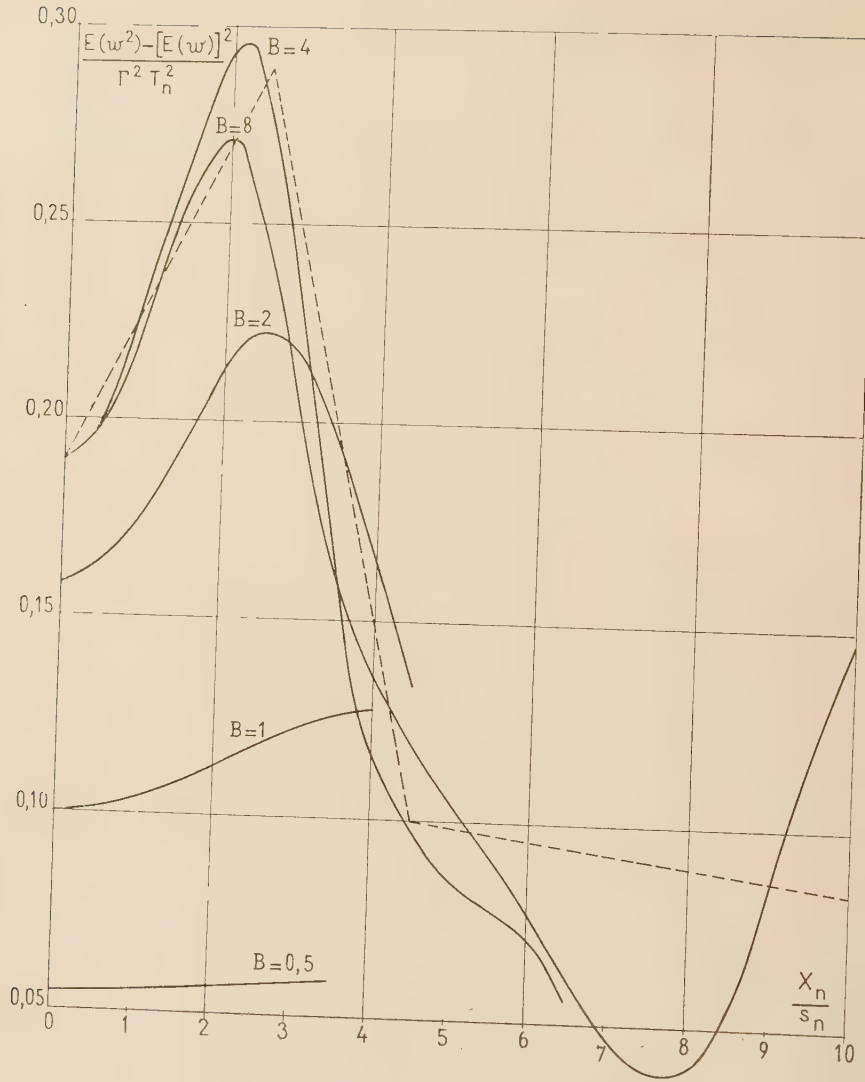


FIG. 7.4. — Étude de $E(w^2)$ en fonction de l'écart mesuré

En fait, pour les valeurs $\frac{X_n}{s_n}$ supérieures à 7,5, nos calculs étant peu précis, les points portés sur les courbes n'ont pas grande signification, mais nous pouvons affirmer que la troisième droite se trouve certainement au-dessus des valeurs vraies.

En résumé, $\frac{E(w^2) - [E(w)]^2}{\sigma_n^2} = \frac{30\, S\sqrt{1+F_n}}{T_n^2}$.

.2.5. Étude de E(xw).

ous étudions E(xw) — E(x)E(w).

a figure 7.5 représente Q $= \frac{E(xw) - E(x)E(w)}{s_n \sqrt{T_n}}$, qu'on peut approxi- aux trois tronçons de droites suivants :

$$\frac{X_n}{s_n} < 2{,}5 \qquad Q = 0{,}1 + 0{,}058 \frac{X_n}{s_n}$$

$$2{,}5 < \frac{X_n}{s_n} < 4{,}5 \qquad Q = 0{,}42 - 0{,}07 \frac{X_n}{s_n}$$

$$\frac{X_n}{s_n} > 4{,}5 \qquad Q = 0{,}19 - 0{,}019 \frac{X_n}{s_n}.$$

n résumé :

$$\frac{E(xw) - E(x)E(w)}{\sigma_n^2} = \frac{15\,Q\sqrt{1 + F_n}}{T_n}.$$

§ 7.3. **Analyse des performances du correcteur**

omme au chapitre VI, nous avons étudié le comportement du correcteur une piste rectiligne subissant un échelon de vitesse d'amplitude variable ès 20 mesures.

ous avons uniquement envisagé les valeurs A = 0,999 et $\delta = 1$.

.3.1. Évolution de α, β et F en fonction du nombre de mesures.

es figures 7.6, 7.7 et 7.8 donnent les valeurs de α, β et F en fonction du mbre de mesures, en absence de bifurcation, avec ou sans bruit.

es valeurs limites sont plus élevées qu'au chapitre VI :

$\alpha = 0{,}340$ (au lieu de 0,240);
$\beta = 0{,}068$ (au lieu de 0,032);
F = 0,514 (au lieu de 0,33).

lles sont atteintes plus rapidement.

n pourrait donc augmenter la valeur de A qui s'écarterait encore plus a réalité.

n présence de bruit, la convergence limite est encore moins forte, et les tuations deviennent sensibles. En effet, les expressions de P, S et Q mon- t que les écarts faibles sont plus influents; elles sont maximales pour un t réduit voisin de 2,5, valeur qui peut se présenter assez souvent en pré- ce de bruit.

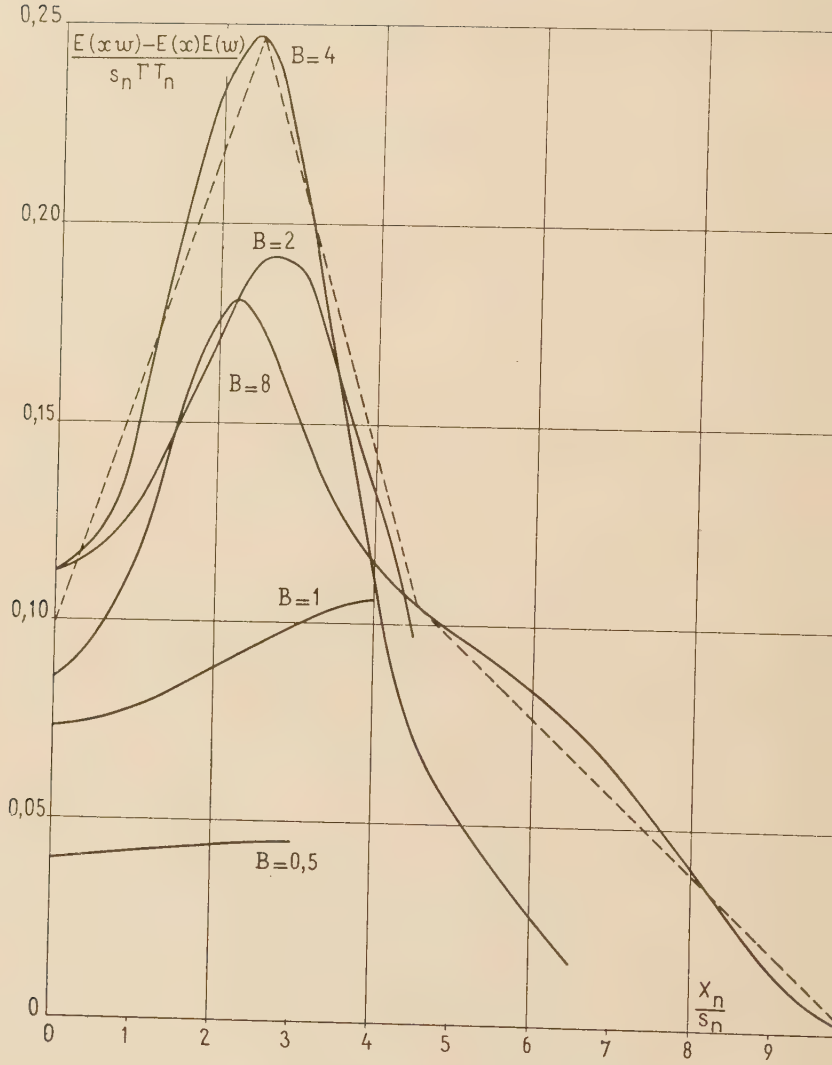


FIG. 7.5. — Étude de E(x w) en fonction de l'état mesuré

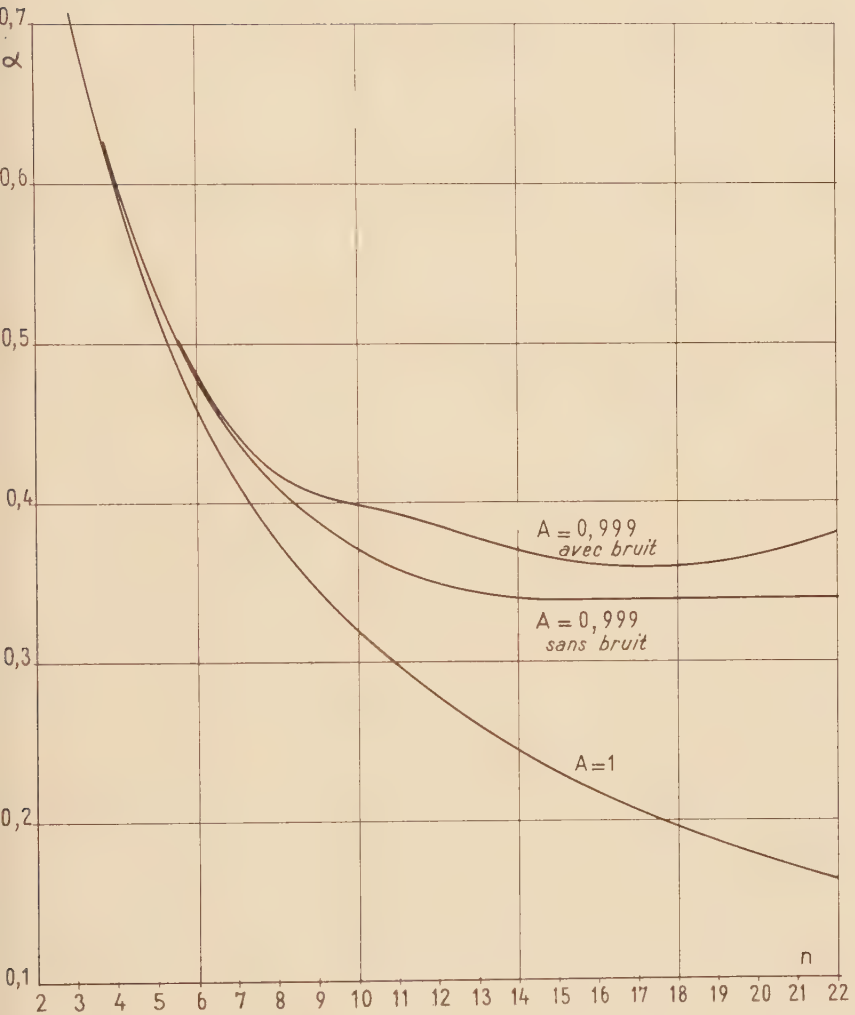


FIG. 7.6. — Correcteur avec estimation de γ. Variations de α en fonction de n

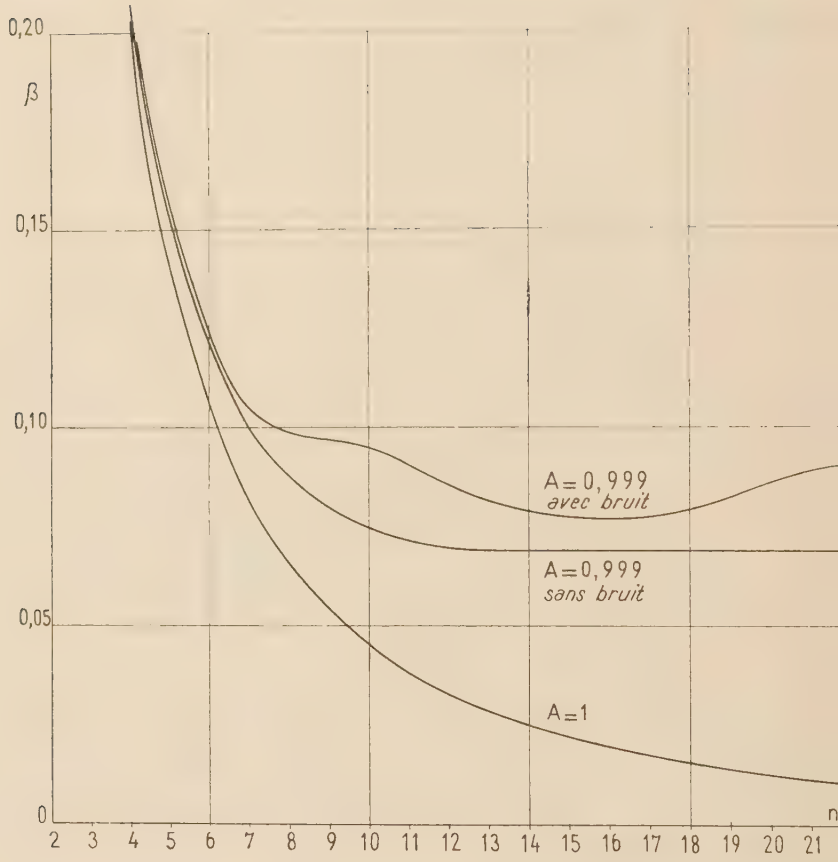


FIG. 7.7. — Correcteur avec estimation de γ. Variations de β en fonction de n

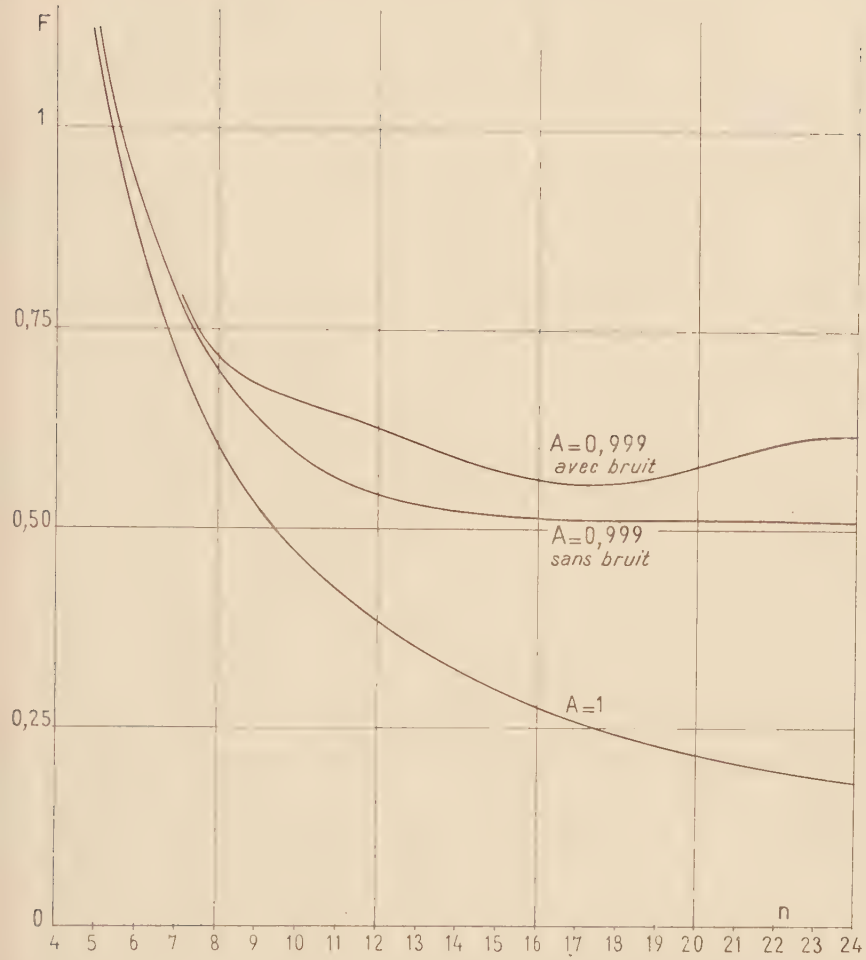


FIG. 7.8. — Correcteur avec estimation de γ. Variations de F en fonction de n

7.3.2. RÉPONSE À DES ÉCHELONS DE VITESSE.

On ne pourra faire une comparaison absolue avec le cas du chapitre VI, es valeurs limites de α et β étant plus élevées. Lorsque l'échelon se produit, a fenêtre de bruit est plus grande, l'écart réduit est plus petit; si les réponses doivent être plus rapides (α et β plus grands), les réouvertures de fenêtres doivent être plus petites.

Les figures 7.9, 7.10, 7.11 et 7.12 correspondent aux figures 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7 de l'étude sans estimation de γ.

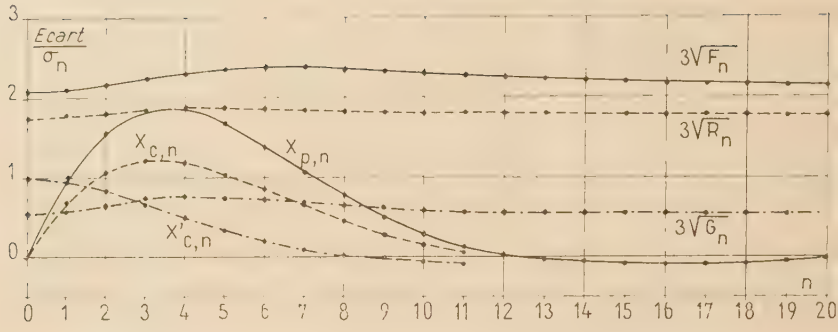


FIG. 7.9. — Correcteur avec estimation de γ ($A = 0{,}999$; $\delta = 1$)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{1}{T_n}\sigma_n$ et fenêtres de bru correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

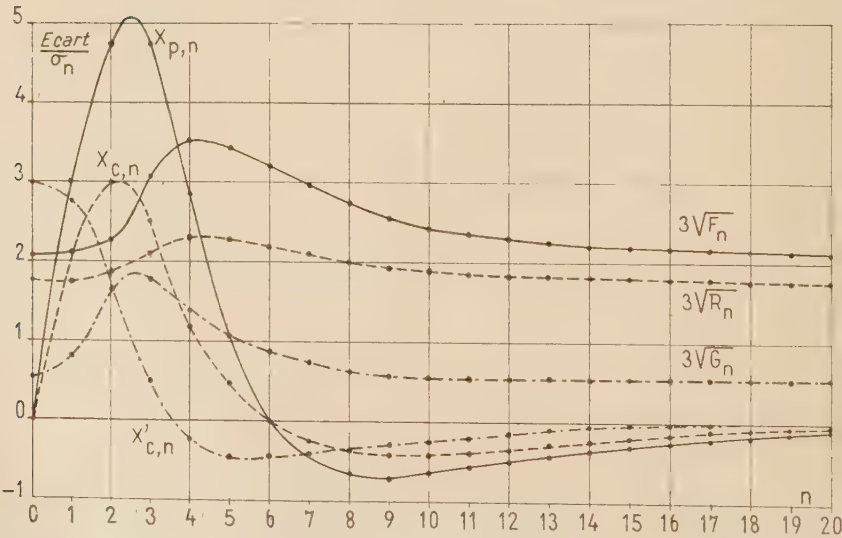


FIG. 7.10. — Correcteur avec estimation de γ ($A = 0{,}999$; $\delta = 1$)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{3}{T_n}\sigma_n$ et fenêtres de bru correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$, et $3\sqrt{G_n}$.

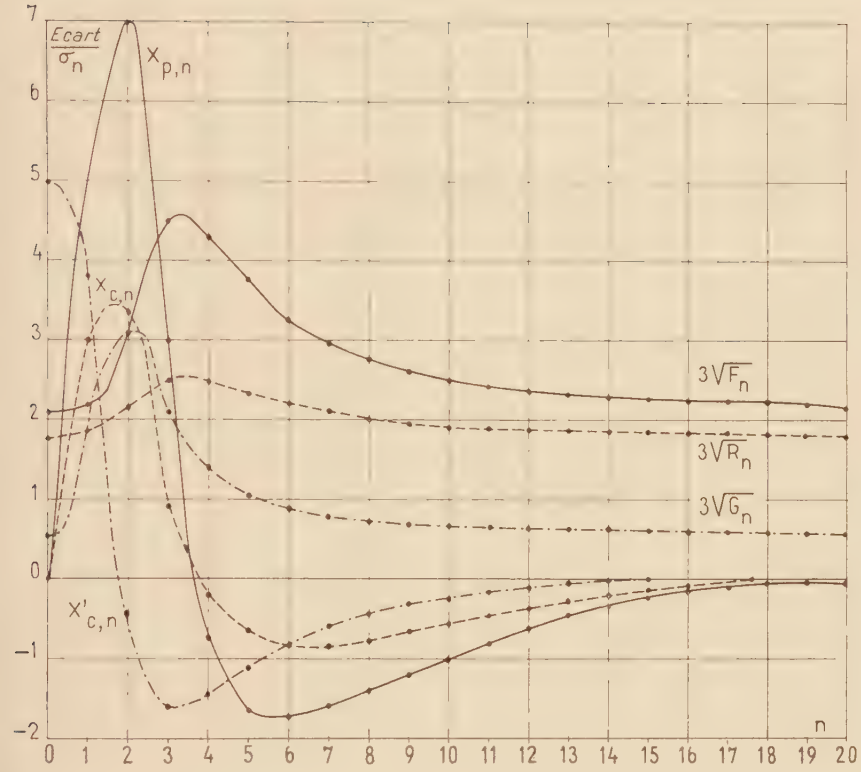


FIG. 7.11. — Correcteur avec estimation de γ (A = 0,999; δ = 1)

Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{5\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $\sqrt{G_n}$.

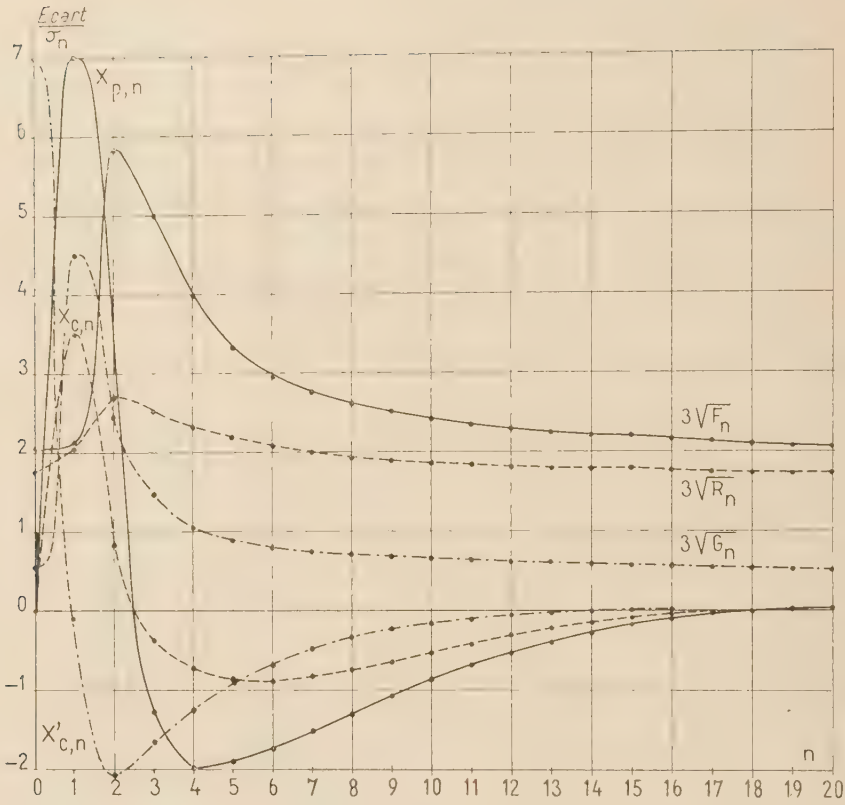


FIG. 7.12. — Correcteur avec estimation de γ (A = 0,999; $\delta = 1$)

Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

7.3.2.1. *Échelon de vitesse de faible amplitude.* — Le seuil de détection de bifurcation n'est jamais atteint.

La réponse est beaucoup plus rapide et l'erreur toujours plus faible que pour la figure 6.4. Cette amélioration provient peut-être du fait que la correction sur β est plus importante ($\mu > 1$). Elle est surtout due au fait que α et β étaient plus grands à l'instant de l'échelon.

7.3.2.2. *Échelon de vitesse d'amplitude* $\frac{3\,\sigma_n}{T_n}$. — La réponse est fort comparable à celle de la figure 6.5. L'écart maximum a même amplitude. Le dépassement transitoire est toutefois plus élevé mais l'écart tend plus rapidement vers zéro; cette différence est certainement due à une correction plus importante en vitesse, qui produit une avance de la prédiction.

En fait les résultats sont beaucoup moins intéressants car les fenêtres plus grandes au départ, s'ouvrent davantage.

Nous avons aussi comparé cette figure 7.10 à la figure 7.13 : réponse obtenue ans estimation de γ avec A = 0,995, α_{1m} = 0,340, β_{1m} = 0,068 (valeurs oisines des limites actuelles). Les dimensions des fenêtres avant l'arrivée de échelon sont bien du même ordre de grandeur. Mais la réponse obtenue sans stimation de γ est plus rapide, avec des écarts maximaux inférieurs, et la éouverture des fenêtres est plus petite.

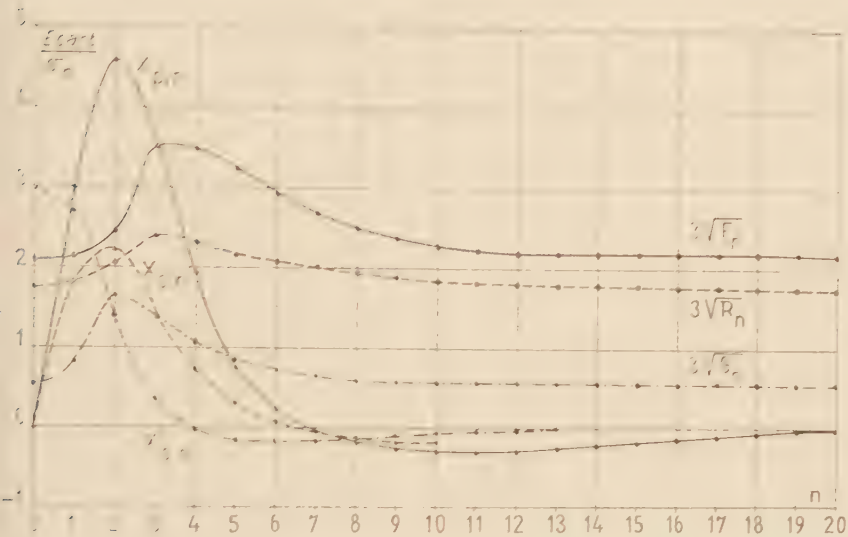


FIG. 7.13. — Correcteur sans estimation de γ (A = 0,995; δ = 1)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse $\frac{3\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit orrespondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

7.3.2.3. *Échelon de vitesse de grande amplitude.* — Les conclusions sont nalogues à celles du cas de l'échelon de $\frac{3\sigma_n}{T_n}$. En comparant aux figures 6.6 : 6.7, le dépassement transitoire est plus fort pour l'échelon de $\frac{5\sigma_n}{T_n}$ et il éapparaît ici pour l'échelon de $\frac{7\sigma_n}{T_n}$: les durées des régimes transitoires sont u même ordre de grandeur et les réouvertures de fenêtres sont plus grandes.

§ 7.4. Conclusion

L'estimation de γ conduit à des calculs supplémentaires importants. Dans ensemble, les résultats sont moins intéressants que sans estimation de γ, algré des régimes transitoires un peu plus courts.
Cette méthode n'est donc pas à retenir.

CHAPITRE VIII

POURSUITE COOPÉRATIVE

§ 8.0. **Introduction**

Nos correcteurs évaluent la position corrigée et la vitesse corrigée à l'instant de la mesure. La prédiction s'effectue comme si le mouvement se poursuivait à une vitesse constante égale à la vitesse corrigée.

Or, dans certains cas, on peut connaître *a priori*, ou éventuellement *a posteriori*, la loi du mouvement, c'est-à-dire la nature de la bifurcation. Ceci suggère de remplacer la dernière équation de prédiction par la loi effective du mouvement : c'est la poursuite coopérative quand on utilise les ordres donnés au mobile. Sur le même principe, on peut estimer *a postériori* la loi du mouvement à partir de l'écart mesuré et reprendre le cas général précédemment étudié. Nous envisagerons d'abord cette méthode de poursuite non coopérative, puis les divers cas correspondant à des ordres particuliers donnés au mobile.

§ 8.1. **Détermination *a posteriori* de la loi du mouvement**

8.1.1. Étude théorique.

Après avoir reçu une mesure et effectué les calculs correspondants, nous disposons des données suivantes :

— la position corrigée $X_{c,n-1}$ et le bruit sur cette position R_{n-1};

— la vitesse corrigée $X'_{c,n-1}$ et le bruit sur cette vitesse G_{n-1};

— la position prédite pour une trajectoire rectiligne $X_{p,n-1}$ et le bruit sur cette position F_n;

— la corrélation entre la position et la vitesse corrigées C_{n-1}.

Lors de la mesure X_n, on détermine un certain écart $X_n - X_{p,n-1}$ duquel on peut déduire $p(\gamma = 0 \mid X_n)$, $E(x)$, $E(w)$, $P = \frac{E(x^2) - [E(x)]^2}{\sigma_n^2}$, $S = \frac{E(w^2) - [E(w)]^2}{\sigma_n^2}$ et $Q = \frac{E(xw) - E(x)\,E(w)}{\sigma_n^2}$.

A partir de $E(x)$ et $E(w)$, on peut, avant d'entreprendre la détermination de α, corriger la position prédite et la vitesse corrigée :

$$\underline{X}_{p,\,n-1} = X_{p,\,n-1} + E\,(x)$$
$$\underline{X}'_{c,\,n-1} = X'_{c,\,n-1} + E\,(w),$$

et écrire le correcteur sous la forme :

$$X_{c,\,n} = \underline{X}_{p,\,n-1} + \alpha_n\,(X_n - \underline{X}_{p,\,n-1})$$
$$X'_{c,\,n} = \underline{X}'_{c,\,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n}\,(X_n - \underline{X}_{p,\,n-1})$$
$$X_{p,n} = X_{c,\,n} + T_{n+1}\,X'_{c,\,n}.$$

En élevant au carré la première relation :

$$E\,(X^2_{c,\,n}) = E\,(\underline{X}^2_{p,\,n-1})\,(1-\alpha_n)^2 + \alpha_n^2\,E\,(X_n^2)\,;$$

x n'étant pas corrélé avec $X_{p,n-1}$,

$$E\,(\underline{X}^2_{p,\,n-1}) = E\,(X^2_{p,\,n-1}) + E\,(x^2) - [E\,(x)]^2\,;$$

R_n est minimal pour $\alpha_n = \dfrac{F_n + P}{1 + F_n + P}$ et vaut alors $R_n = \alpha_n$.

La deuxième relation donne :

$$E\,(X'^2_{c,\,n}) = E\,(\underline{X}'^2_{c,\,n-1}) + \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 [E\,(X_n^2) + E\,(\underline{X}^2_{p,\,n-1})]$$
$$- 2\,\frac{\beta_n}{T_n}\,E\,(\underline{X}'_{c,\,n-1}\,\underline{X}_{p,\,n-1}).$$

Or :

$$\frac{E\,(\underline{X}'^2_{c,\,n-1})}{\sigma_n^2} = G_{n-1} + S, \qquad \text{et} \qquad \frac{E\,(\underline{X}'_{c,\,n-1}\,\underline{X}_{p,\,n-1})}{\sigma_n^2} = C_{n-1} + T_n\,G_{n-1} + Q.$$

G_n est minimal pour $\dfrac{\beta_n}{T_n} = \dfrac{C_{n-1} + T_n G_{n-1} + Q}{1 + F_n + P}$ et vaut alors

$$G_n = G_{n-1} + S - \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (1 + F_n + P).$$

Le produit des deux premières relations donne :

$$E\,(X_{c,\,n}\,X'_{c,\,n}) = E\,(\underline{X}_{p,\,n-1}\,\underline{X}'_{c,\,n-1})\,(1-\alpha_n)$$
$$- \frac{\beta_n}{T_n}\,(1-\alpha_n)\,E\,(\underline{X}^2_{p,\,n-1}) + \frac{\alpha_n\,\beta_n}{T_n}\,E\,(X_n^2),$$

soit :

$$C_n = (1-\alpha_n)\,(C_{n-1} + T_n\,G_{n-1} + Q) - (1-\alpha_n)\,\frac{\beta_n}{T_n}\,(F_n + P) + \frac{\alpha_n\,\beta_n}{T_n};$$

cette quantité est minimale pour les valeurs de α_n et $\frac{\beta_n}{T_n}$ précédemment trouvées et vaut alors $C_n = \frac{\beta_n}{T_n}$.

En élevant au carré la troisième relation, on trouve encore :

$$F_{n+1} = \alpha_n + T_n^2 G_n + 2 T_n C_n.$$

8.1.2. Résultats numériques.

Nous avons étudié, ici encore, le comportement du correcteur sur une piste rectiligne subissant un échelon de vitesse d'amplitude variable après 20 mesures. Nous avons pris A = 0,999 et $\delta = 1$.

8.1.2.1. *Évolution de α, β et F en fonction du nombre de mesures.* — Les résultats sont à peu près identiques à ceux obtenus en 7.3.1. Les valeurs limites sont légèrement plus faibles :

$\alpha_{19} = 0{,}33619$ au lieu de 0,33954;
$\beta_{19} = 0{,}06833$ au lieu de 0,06827;
$G_{19} = 0{,}03268$ au lieu de 0,03685;
$F_{19} = 0{,}50646$ au lieu de 0,51370.

Le bruit a moins d'influence sur l'évolution des coefficients et on ne remarque pratiquement pas les fluctuations de α, β et F avant la vingtième mesure.

8.1.2.2. *Réponse à des échelons de vitesse.* — Les figures 8.1, 8.2, 8.3 et 8.4 correspondent aux figures 7.9, 7.10, 7.11 et 7.12 et respectivement à des échelons de $\frac{1\,\sigma_n}{T_n}$, $\frac{3\,\sigma_n}{T_n}$, $\frac{5\,\sigma_n}{T_n}$ et $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$.

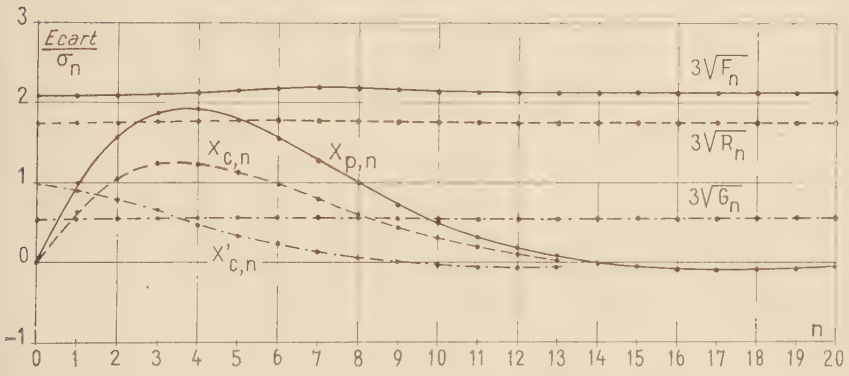


Fig. 8.1. — Correcteur avec modification *a posteriori* de la position et de la vitesse corrigées (A = 0,999; $\delta = 1$)
Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{1\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

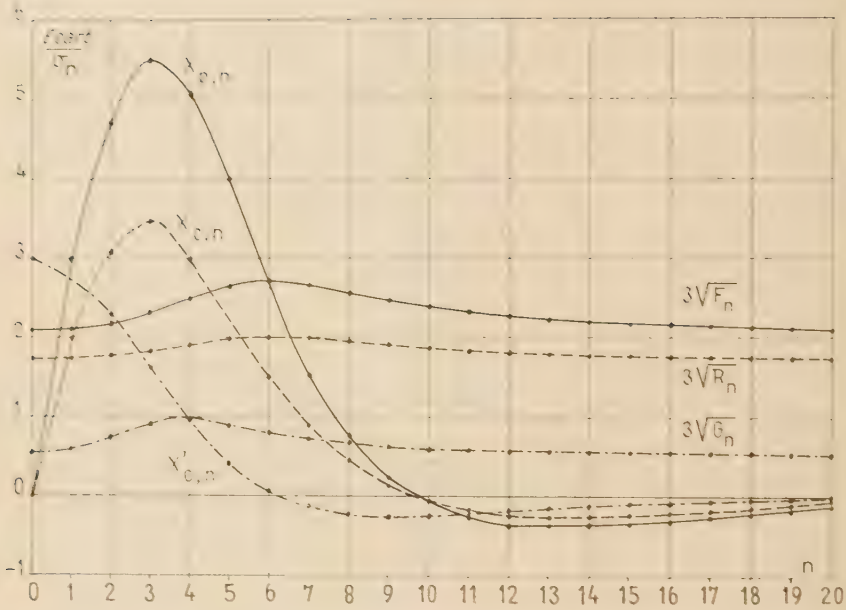


FIG. 8.2. — Correcteur avec modification *a posteriori* de la position et de la vitesse corrigées (A = 0,999; δ = 1)

Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{3\,\tau_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

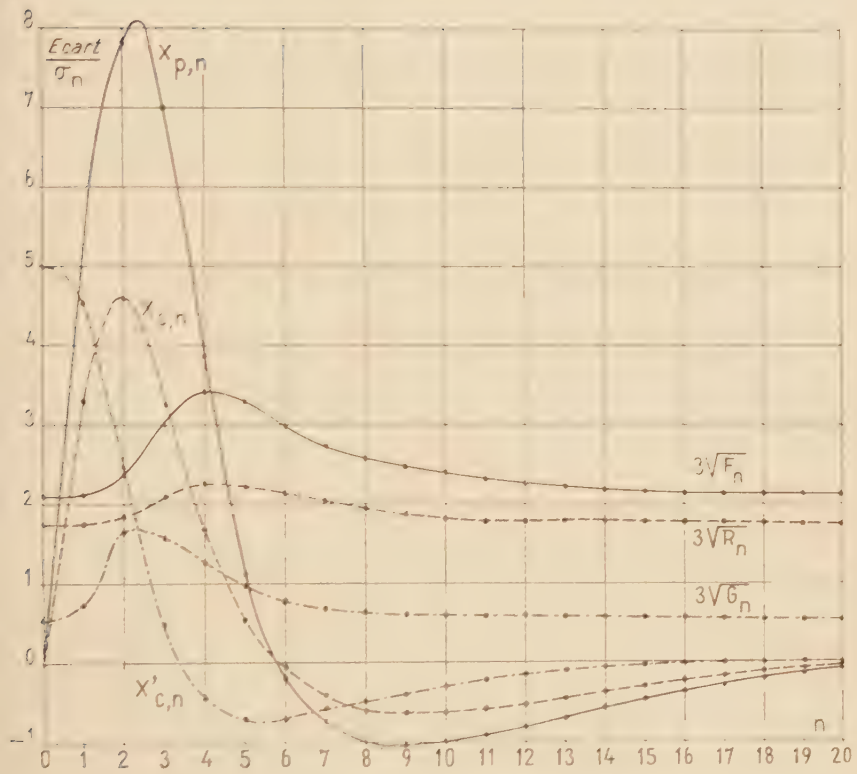


FIG. 8.3. — Correcteur avec modification *a posteriori* de la position et de la vitesse corrigées (A = 0,999; $\delta = 1$)

Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{5\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

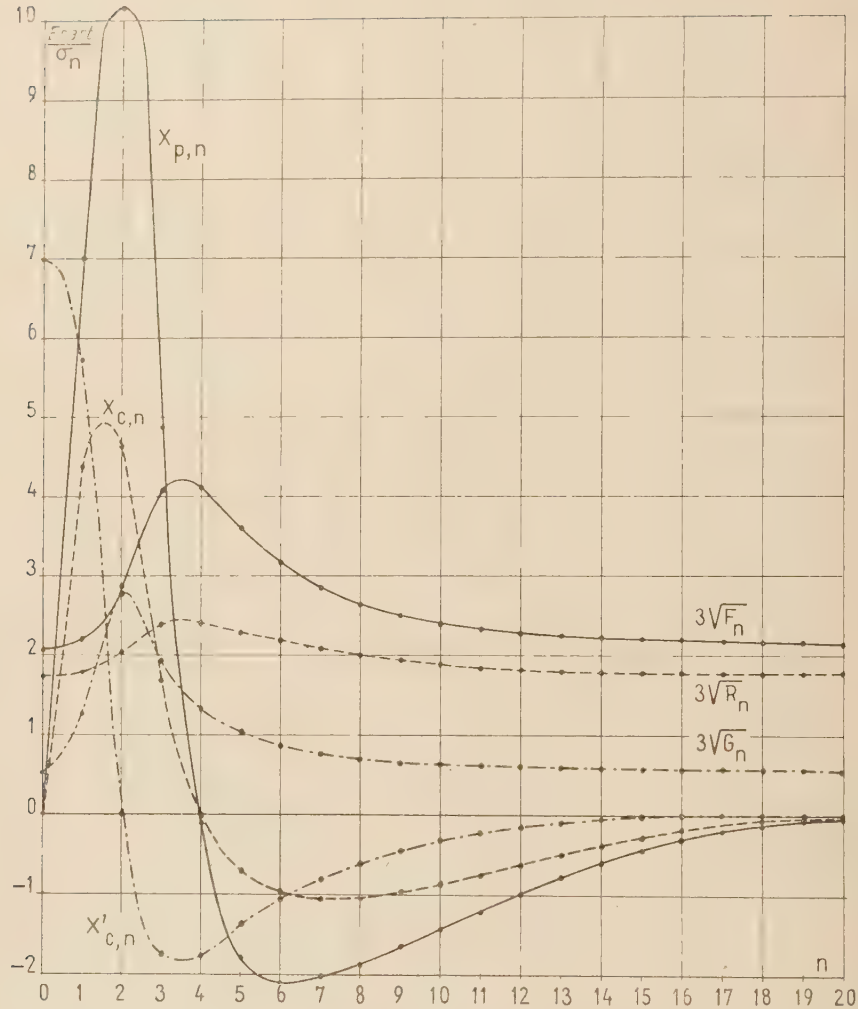


FIG. 8.4. — Correcteur avec modification *a posteriori* de la position et de la vitesse corrigées (A = 0,999; δ = 1)

Erreurs sur $X_{p,n}$, $X_{c,n}$ et $X'_{c,n}$ pour un échelon de vitesse de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$ et fenêtres de bruit correspondantes $3\sqrt{F_n}$, $3\sqrt{R_n}$ et $3\sqrt{G_n}$.

On constate que la réponse transitoire est notablement plus lente et que les écarts maximaux sont plus importants. De ce point de vue, cette méthode est donc beaucoup moins intéressante.

Par contre, les ouvertures de fenêtres sont beaucoup plus petites : pour l'échelon de $\frac{1\,\sigma_n}{T_n}$, elle est pratiquement inexistante; pour l'échelon de $\frac{7\,\sigma_n}{T_n}$, on revient entre α_3 et α_4 (en 7.3.2 on revenait entre α_1 et α_2). Ceci correspond au but propre de la poursuite coopérative. On reste plus longtemps en dehors de la fenêtre de bruit sans toutefois sortir de la fenêtre d'évolution; mais, comme les corrélations entre plusieurs trajectoires se font pour tous les points à l'intérieur de la fenêtre d'évolution, la dimension restreinte de celle-ci faciliterait le choix.

8.1.3. Conclusion.

L'évaluation *à posteriori* de la loi de la trajectoire à partir de l'écart mesuré conduit donc à une solution moins intéressante que celles étudiées précédemment. Les calculs sont peut-être un peu plus simples que pour la méthode avec estimation de γ, mais les réponses transitoires sont trop lentes et les écarts maximaux plus importants. En agissant sur δ et sur A, on pourrait retrouver des conditions acceptables, avec l'avantage d'une ouverture beaucoup plus petite de la fenêtre de bruit.

§ 8.2. **Connaissance *a priori* de la loi du mouvement**

8.2.1. On impose une accélération tangentielle γ, τ secondes après la correction.

Désignons par γ_x et γ_y les projections de γ sur les axes Ox et Oy suivant lesquels s'effectue la poursuite. Les équations s'écrivent :

$$X_{c,n} = X_{p,n-1} + \alpha_n (X_n - X_{p,n-1})$$

$$X'_{c,n} = X'_{p,n-1} + \frac{\beta_n}{T_n} (X_n - X_{p,n-1})$$

$$X'_{p,n} = X'_{c,n} + (T_{n+1} - \tau)\,\gamma_x$$

$$X_{p,n} = X_{c,n} + T_n X'_{c,n} + \frac{1}{2}(T_{n+1} - \tau)^2 \gamma_x, \quad \text{avec} \quad \gamma_x = \frac{\gamma\, X'_{c,n}}{\sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}}.$$

Si γ et τ étaient connus sans erreur, le calcul des coefficients α_n et β_n s'effectuerait comme si la vitesse restait constante.

En fait γ et τ ne sont pas connus rigoureusement; le cap de la trajectoire dépend des vitesses corrigées suivant chaque axe et les écarts sur les projections γ_x et γ_y sont corrélés avec ces vitesses.

8.2.1.1. *Cas où l'incertitude sur τ et γ est négligeable.* — Si φ désigne le cap tel que $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{Y'_{c,n}}{X'_{c,n}}$,

$$d\gamma_x = \gamma\left(\frac{dX'_{c,n}}{\sqrt{X'^2_{c,n}+Y'^2_{c,n}}}\sin^2\varphi + \frac{dY'_{c,n}}{2\sqrt{X'^2_{c,n}+Y'^2_{c,n}}}\sin 2\varphi\right).$$

Posons :

$$b = \frac{(T_{n+1}-\tau)\gamma}{\sqrt{X'^2_{c,n}+Y'^2_{c,n}}}\sin^2\varphi, \qquad g = \frac{\gamma^2(T_{n+1}-\tau)^2\sin^2 2\varphi}{4(X'^2_{c,n}+Y'^2_{c,n})}$$

$$e = \frac{(T_{n+1}-\tau)^2\gamma}{2T_n\sqrt{X'^2_{c,n}+Y'^2_{c,n}}}\sin^2\varphi.$$

Dans les cas les plus défavorables $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ pour b et e, et $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ pour g; en prenant : $\gamma_{max} = 10$ m/s^2, $V_{min} = 300$ m/s, $T_{n+1} = 8$ secondes et $\tau = 0$, $b_{max} = 0{,}27$, $g_{max} = 0{,}018$, $e_{max} = 0{,}133$.

Nous supposons que X et Y étaient décorrélés avant la poursuite coopérative. On peut écrire :

$$dX'_{p,n} = dX'_{c,n} + (T_{n+1}-\tau)\,d\gamma_x = dX'_{c,n}(1+b) + dY'_{c,n}\sqrt{g},$$

d'où :

$$\frac{E(X'^2_{p,n})}{\sigma_n^2} = G_{x,n}(1+b)^2 + G_{y,n}\,g;$$

$$dX_{p,n} = dX_{c,n} + T_n\,dX'_{c,n} + \frac{(T_{n+1}-\tau)^2}{2}\,d\gamma_x$$

$$= dX_{c,n} + T_n\,dX'_{c,n}(1+e) + \frac{(T_{n+1}-\tau)\sqrt{g}}{2}\,dY'_{c,n},$$

d'où :

$$\frac{E(X^2_{p,n})}{\sigma_n^2} = R_{x,n} + T_n^2 G_{x,n}(1+e)^2 + 2T_n C_{x,n}(1+e) + \frac{(T_{n+1}-\tau)^2 g}{4}G_{y,n}$$

et :

$$\frac{E(X_{p,n}X'_{p,n})}{\sigma_n^2} = C_{x,n}(1+b) + T_n G_{x,n}(1+b)(1+e) + \frac{(T_{n+1}-\tau)g}{2}G_{y,n}.$$

La poursuite coopérative perturbe donc les calculs du correcteur :

1° Il apparaît une corrélation entre X et Y sauf pour $\varphi = k\dfrac{\pi}{2}$; en pratique, celle-ci intervient toujours dans une somme; $T_n^2 G_n$ est toujours faible par rapport à R_n et $T_n C_n$, et g est inférieur à 2 % : on peut donc négliger ce terme correctif et supposer X et Y décorrélés;

2° En général, les autres termes ne sont pas négligeables. Les formules de récurrence deviennent :

$$F_n = R_n + T_n^2 G_n (1+e)^2 + 2\,T_n C_n (1+e),$$

$$\alpha_n = \frac{F_n}{1+F_n},$$

$$\frac{\beta_n}{T_n} = \frac{C_n (1+b) + T_n G_n (1+b)(1+e)}{1+F_n},$$

$$G_n = G_{n-1}(1+b)^2 - \left(\frac{\beta_n}{T_n}\right)^2 (1+F_n).$$

$T_n^2 G_n$ et $T_n C_n$ étant petits devant R_n, la majoration relative de F_n est faible et α_n est presque inchangé. Par contre, dans le cas le plus défavorable, β_n peut être augmenté de 30 % et il faut en tenir compte.

8.2.1.2. *On considère uniquement l'imprécision sur τ et γ. On suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre ces deux grandeurs.*

$$dX'_{p,n} = dX'_{c,n} + d\gamma\,(T_{n+1} - \tau)\cos\varphi - d\tau\,\gamma\cos\varphi.$$

$$\frac{E(X'^2_{p,n})}{\sigma_n} = G_{x,n} + (T_{n+1}-\tau)^2 \frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_n^2}\cos^2\varphi + \gamma^2 \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_n^2}\cos^2\varphi$$

$$\frac{E(X'^2_{p,n})}{\sigma_n^2} = F_{x,n} + \frac{(T_{n+1}-\tau)^4}{4}\frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_n^2}\cos^2\varphi + \gamma^2 (T_{n+1}-\tau)^2 \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_n^2}\cos^2\varphi$$

$$\frac{E(X_{p,n} X'_{p,n})}{\sigma_n^2} = C_{x,n} + \frac{(T_{n+1}-\tau)^3}{2}\frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_n^2}\cos^2\varphi + \gamma^2 (T_{n+1}-\tau)\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_n^2}\cos^2\varphi.$$

L'erreur sur τ n'intervient en principe qu'une fois et donne, pour $\sigma_\tau = 1$ seconde, une variation de C_n inférieure à 0,01 ; $\sigma_\gamma = 2$ m/s² apporte une variation de C_n inférieure à 0,01 ; ces modifications n'interviennent pratiquement pas avant la dixième mesure.

8.2.2. On impose une accélération normale à l'instant de la correction ; il n'y a pas d'incertitude sur γ.

Nous admettons que les diverses quantités α_n, β_n, G_n, F_n et C_n sont les mêmes pour les correcteurs correspondant à la poursuite suivant chaque axe.

8.2.2.1. *Calcul de la position et de la vitesse prédites.* — La trajectoire est un arc de cercle de rayon $R = \frac{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}{\gamma}$; l'angle du virage vaut :

$$\theta = \frac{\gamma\,T_n}{\sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}} ;$$

l'angle de cap était tel que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y'_{c,n}}{X'_{c,n}}$.

On montre facilement que les quantités x et y à ajouter à $X_{c,n}$ et $Y_{c,n}$ pour obtenir $X_{p,n}$ et $Y_{p,n}$ sont :

$$x = 2\,R \sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right),$$

$$y = 2\,R \sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right).$$

Lorsque θ est petit :

$$x \simeq T_n\left(X'_{c,n} - \frac{Y'_{c,n}\,\gamma\,T_n}{2\sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}}\right)$$

$$y \simeq T_n\left(Y'_{c,n} + \frac{X'_{c,n}\,\gamma\,T_n}{2\sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}}\right).$$

Les projections de la vitesse prédite sont :

$$X'_{p,n} = \sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}\cos(\varphi + \theta),$$

$$Y'_{p,n} = \sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}\sin(\varphi + \theta).$$

Lorsque θ est petit :

$$X'_{p,n} \simeq X'_{c,n} - \frac{Y'_{c,n}\,\gamma\,T_n}{\sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}},$$

$$Y'_{p,n} \simeq Y'_{c,n} + \frac{X'_{c,n}\,\gamma\,T_n}{\sqrt{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}}.$$

8.2.2.2. *Estimation de* F_{n+1}, G_n *et* C_n. — Il est inutile d'effectuer les calculs suivant Y; à un signe près, on passe des expressions de x et $X'_{p,n}$ à celles de y et $Y'_{p,n}$ par une permutation de X et Y; les résultats seront donc les mêmes pour l'erreur maximale.

$$dx = T_n\left[\left[1 + \frac{\gamma\,T_n\,X'_{c,n}\,Y'_{c,n}}{2\,(X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n})^{3/2}}\right]dX'_{c,n} - \frac{\gamma\,T_n}{2\,(X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n})^{1/2}}\left(1 - \frac{Y'^2_{c,n}}{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}\right)dY'_{c,n}\right]$$

$$dx = T_n\left[\left(1 + \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right)dX'_{c,n} - \frac{\theta}{2}\cos^2\varphi\,dY'_{c,n}\right]$$

$$dX_{p,n} = dX_{c,n} + dx$$

$$\frac{E\,(X'_{p,n})}{\sigma'_n} = R_n + T_n^2 G_{x,n}\left(1 + \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right)^2 + 2\,T_n\,C_n\left(1 + \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right) + T_n^2 G_{y,n}\frac{\theta^2}{4}\cos^4\varphi.$$

$$X'_{p,n} = \left[1 + \frac{\gamma T_n X'_{c,n} Y'_{c,n}}{(X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n})^{3/2}}\right] dX'_{c,n} - \frac{\gamma T_n}{(X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n})^{1/2}} \left(1 - \frac{Y'^2_{c,n}}{X'^2_{c,n} + Y'^2_{c,n}}\right) dY'_{c,n}$$

$$dX'_{p,n} = dX'_{c,n}\left(1 + \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right) - \theta \cos^2\varphi \, dY'_{c,n}$$

$$\frac{E(X'^2_{p,n})}{\sigma_n^2} = G_{x,n}\left(1 + \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right)^2 + G_{y,n}\theta^2\cos^4\varphi$$

$$\frac{E(X_{p,n}X'_{p,n})}{\sigma_n^2} = C_{x,n}\left(1 + \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right) + G_{c,n}\left(1 + \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right)\left(1 + \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right) T_n + G_{y,n}\left(\frac{\theta^2}{2}\cos^4\varphi\right) T_n.$$

On voit donc apparaître une corrélation entre X et Y mais, le coefficient u terme en $G_{y,n}$ étant proportionnel à θ^2, le terme dû à cette corrélation ajore $G_{y,n}$ de moins de 1 % dès que $\theta < \frac{1}{10}$ radian.

Les formules montrent que $G_{x,n}$ est à multiplier par un terme correctif $\left(1 - \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right)^2$ dans l'expression de $E(X^2_{p,n})$; $\left(1 - \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right)^2$ dans l'expression de $E(X'^2_{p,n})$; $\left(1 - \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right)\left(1 - \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right)$ dans l'expression de $E(X_{p,n}X'_{p,n})$.

Si θ est petit, les majorations relatives sont respectivement $\frac{\theta}{2}\sin 2\varphi$, $\theta \sin 2\varphi$, $\frac{\theta}{2}\sin 2\varphi$. Dans le cas le plus défavorable $\sin 2\varphi = 1$; pour simplifier, on onsidérera dans les trois cas une majoration relative de θ.

$C_{x,n}$ est à multiplier par $\left(1 - \frac{\theta}{4}\sin 2\varphi\right)$ ou $\left(1 - \frac{\theta}{2}\sin 2\varphi\right)$ suivant les cas; n choisira ici $\frac{\theta}{2}$ comme majoration relative maximale. Dans les formules du orrecteur, $T_n^2 G_n$ intervient toujours additionné à R_n ou à $T_n C_n$ et il est oujours faible par rapport à ces quantités; la majoration sur $T_n C_n$ sera donc répondérante.

On peut, par exemple, établir la valeur de θ qui majore $T_{10}C_{10}$ de 2^{-6} 'est la précision que l'on se fixe sur β_{10} au chapitre VI pour choisir la valeur e A) :

$$T_{10}C_{10} = \beta_{10} = 0{,}045455, \text{ d'où } \theta = \frac{2^{-5}}{0{,}045455} \simeq 0{,}7 \text{ radian} \simeq 40^\circ;$$

majoration correspondante de $T_{10}^2 G_{10}$ est $0{,}0063 < 2^{-7}$; le terme introduit ar $G_{y,n}$ sera inférieur à $0{,}0022 < 2^{-9}$. Ces calculs ne sont qu'à peine valables our une valeur de θ aussi importante, mais ils montrent que, pratiquement n pourra toujours négliger les corrections sur $T_n^2 G_n$ et $T_n C_n$, et il est inutile e mener des calculs plus rigoureux.

8.2.3. On impose une accélération normale à l'instant de la correction; il y a une incertitude sur γ.

Il faut ajouter à dx le terme $T_n^2 \frac{\sin\varphi}{2} d\gamma$, et à $dX'_{p,n}$ le terme $T_n \sin\varphi d\gamma$, ce qui entraîne les majorations maximales suivantes :

$$T_n^2 \frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_n^2} \text{ sur } G_n, \quad \frac{T_n^3}{2} \frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_n} \text{ sur } C_n \text{ et } \frac{T_n^4}{4} \frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_n^2} \text{ sur } F_n.$$

Si, comme précédemment, on cherche la valeur de σ_γ qui majore $T_{10}C_{10}$ d'une quantité égale à 2^{-6}, on obtient $\sigma_\gamma^2 = \frac{0{,}0156 \times 2\,\sigma_n^2}{T_n^3}$; en prenant $\sigma_n = 300$ mètres et $T_n = 8$ secondes, $\sigma_\gamma = 0{,}83$ m/s^2.

Les perturbations apportées au correcteur par l'imprécision sur γ sont donc plus importantes que celles dues aux imprécisions sur les position et vitesse corrigées.

8.2.4. Conclusion.

Des études expérimentales en poursuite coopérative ont été réalisées à l'aide de notre correcteur : les positions prédites sont très proches des positions réelles et les coefficients du correcteur restent à leur valeur minimale pour des accélérations transverses de plusieurs g. La même piste sans poursuite coopérative conduit à des écarts importants lors du début de l'arc de cercle et à une augmentation importante des dimensions des fenêtres de bruit dès que le seuil de détection de la bifurcation est atteint.

CHAPITRE IX

CONDITIONS TECHNIQUES D'UTILISATION

§ 9.0. **Introduction**

Les conditions techniques ne permettent pas l'utilisation intégrale de otre théorie : le calculateur doit pouvoir suivre de nombreuses pistes en ême temps et, éventuellement, être disponible pour effectuer d'autres pérations, par exemple les calculs des ordres donnés aux pistes suivies en oursuite coopérative.

§ 9.1. **Critères de choix des paramètres α et β**

Pour réduire le temps de calcul, nous avons essayé de résumer les coeffi-ents α et β à utiliser en une table restreinte; le choix s'effectue suivant deux itères :

1° L'évolution antérieure de la piste caractérisée par le nombre de manques information, le nombre de mesures effectuées, et éventuellement la qualité ces mesures (écarts plus ou moins importants par rapport aux positions rédites). Les diverses éventualités ont pu être résumées en un nombre res-eint d'états caractérisés chacun par un indice M. A chaque valeur de M rrespondent une fenêtre de bruit et un couple de paramètres α et β;

2° L'écart avec la position prédite; ce deuxième critère provoque une majo-tion de α et de β uniquement en fonction de l'écart réduit sur la mesure indépendante de la précision déjà atteinte. En pratique, on quantifie les ajorations $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ pour divers niveaux de l'écart réduit; lorsque l'informa-on se trouve dans la fenêtre de bruit caractérisée par $3s_n$, $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont ulles.

§ 9.2. Caractéristiques de la table des paramètres α et β

La table des paramètres α et β doit comprendre deux groupes de valeurs :

1° Si les mesures s'effectuent régulièrement le long d'une trajectoire rectiligne uniforme, les paramètres devront être choisis sur la courbe $\beta = f(\alpha)$ définie au chapitre II et représentée sur la figure 1.2. Les valeurs que nous avons établies par la méthode des moindres carrés peuvent suffire, mais, éventuellement, pour une analyse plus fine, il faudrait y ajouter un certain nombre de points intermédiaires;

2° Si, au contraire, il y a des manques d'information, β doit être plus grand pour une même valeur de α : si le temps qui sépare deux corrections est important, l'écart mesuré doit contribuer davantage à l'estimation de la vitesse.

Le nombre de valeurs différentes qui constituent cette table est nécessairement limité par les possibilités de stockage du calculateur; d'ailleurs, il est inutile d'accéder au-delà d'une certaine précision, et ceci pour deux raisons :

Dès que la fenêtre de bruit devient petite par rapport à la fenêtre d'évolution, on ne peut plus améliorer le discernement des pistes;

La probabilité de bifurcation deviendrait très grande, et les faibles coefficients ne seraient que très rarement utilisés.

§ 9.3. Règle d'utilisation

Une valeur de M est donc associée à chaque trajectoire; elle est réévaluée chaque fois que les position et vitesse corrigées sont mises à jour.

Connaissant M, on lit dans la table les dimensions de la fenêtre de bruit et les paramètres α et β correspondant à un écart réduit inférieur à $3s_n$. On peut alors normer l'écart mesuré et en déduire $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$. Les coefficients à utiliser sont alors $\alpha + \Delta\alpha$ et $\beta + \Delta\beta$.

Enfin, dans une autre table, on pourra lire la nouvelle valeur à attribuer à M; elle dépendra :

— de l'ancienne valeur de M;

— de la présence ou de l'absence de mesure à l'instant de la mise à jour;

— de l'écart réduit correspondant s'il y a eu mesure.

S'il n'y a pas eu de mesure (manque), la mise à jour porte uniquement sur la prédiction et s'effectue sans calcul de α et β; il y a uniquement modification de M.

§ 9.4. Transmission irrégulière d'informations

Si la probabilité de détection est faible ou si la transmission de l'information ne s'effectue pas à chaque période d'échantillonnage, l'utilisation des tables conduit à des résultats peu précis.

On peut tourner la difficulté en considérant une période d'échantillonnage différente égale au temps moyen qui sépare les corrections effectives. En effet, si l'on transmet une information sur deux, on atteindra théoriquement en $2n$ périodes d'échantillonnage normales la même précision qu'après n informations.

C'est pourquoi nous avons systématiquement calculé les coefficients α et β correspondant à des intervalles de temps $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, $\frac{T}{4}$ entre corrections pour en déduire un autre tableau d'évolution de la quantité M.

§ 9.5. **Conclusion**

Nous ne détaillerons pas ici davantage cette étude qui a exigé un dépouillement long et fastidieux de résultats numériques; de fait, nous avons calculé plusieurs milliers de couples α et β correspondant aux divers cas possibles d'évolution de trajectoires.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Pour donner toute satisfaction, un système de poursuite automatique doit posséder les qualités suivantes [22-26] :

1° Filtrer autant qu'il est pratique le bruit sur les informations, en vue de minimiser les dimensions de la fenêtre de bruit;

2° Donner une réponse transitoire aussi courte que possible lorsque la piste subit des échelons de vitesse ou d'accélération;

3° Traiter avec le minimum de perturbation les informations qui ne correspondent pas à des mobiles réels;

4° Attribuer correctement les diverses mesures reçues du détecteur aux pistes en cours de traitement (Identification) afin d'augmenter au maximum leur durée de vie.

Notre correcteur s'applique à la construction séparée de chacune des pistes à partir des informations qui leur sont respectivement attribuées. Sa forme optimale dépend de la nature des trajectoires. Si leur loi est connue d'avance, le filtrage pourra devenir très rigoureux, mais ceci après un nombre d'autant plus grand d'informations que la forme est plus complexe. Dès que la trajectoire cesse d'être un mouvement rectiligne uniforme, il est difficile de déterminer rapidement l'accélération correspondant à la bifurcation à partir des écarts mesurés; on se contentera de chiffrer la probabilité d'avoir effectivement une bifurcation. Les réponses transitoires sont alors d'autant plus rapides que le virage est important, le seuil de détection est plus vite dépassé; toutefois, si l'échelon est de faible amplitude, les fractions de l'écart due au bruit et due au virage restent du même ordre de grandeur. L'auto-optimisation consiste à régler les coefficients du correcteur pour ne garder que les mesures antérieures encore significatives.

Tout cela favorise d'ailleurs l'Identification :

Si les fenêtres de bruit sont plus petites, la probabilité qu'elles contiennent plusieurs informations sera plus faible;

Si le système suit au plus près la trajectoire au cours de ses évolutions, les écarts mesurés seront plus significatifs;

La corrélation information-piste doit être basée sur la probabilité d'appartenance d'une mesure à une piste déterminée : l'écart réduit est le facteur qui traduit le plus simplement cette probabilité. En raison de la forme de la fenêtre d'évolution, l'écart suivant la direction normale à la trajectoire serait plus exact, mais conduirait à des calculs incompatibles avec l'exploitation pratique.

Les méthodes de travail sont multiples pour aborder de tels problèmes. Nous avons vu combien la transformée en Z était commode pour les cas linéaires échantillonnés à période constante. Si la période est aléatoire, il est préférable d'écrire les équations aux différences finies : leurs expressions sont simples si tout le passé peut se résumer dans la connaissance de la variable et de ses premières dérivées à l'instant de la dernière mesure.

Chaque auteur, par contre, a sa propre méthode lorsqu'il s'agit de problèmes non linéaires ou d'auto-optimisation; chacune apporte des résultats intéressants dans le sens désiré. Personnellement, ne pouvant définir le spectre du signal d'entrée, nous avons adopté une méthode probabiliste, avec la certitude qu'elle pourra rendre les meilleurs services pour la réalisation future d'autres correcteurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. R. Benedict and G. W. Bordner, « Synthesis of an Optimal Set of Radar Track-While-Scan Smoothing Equations », *I.R.E. Trans. on Automatic Control,* vol. A.C. 7, n° 4, p. 27-32, july 1962.

[2] A. R. Bergen, « Random Sampling : its Effect on Spectral Density », *I.R.E. Trans. on Automatic Control,* vol. A.C. 4, n° 3, p. 197, 1959.

[3] A. R. Bergen, « On the statistical Design of linear Random Sampling Systems », 1st Congrès I.F.A.C., Moscou, 1960.

[4] M. Carpentier, *Radars. Théories modernes.* Dunod, Paris, 1963.

[5] E. Deffontaines et N. Segard, « Calcul de la probabilité d'évolution d'une trajectoire en présence de bruit », *C. R. Acad. Sc. Paris,* t. 260, p. 2120-2123, 1965.

[6] E. Deffontaines et N. Segard, « Calcul d'un correcteur pour la prédiction, en présence de bruit, d'une trajectoire rectiligne susceptible d'évolution », *C. R. Acad. Sc. Paris,* t. 260, p. 2409-2412, 1965.

[7] G. Derogis, *Optimisation d'un système à données aléatoires et échantillonnées en présence de bruit,* thèse de maîtrise ès sciences aéronautiques, E.N.S.A., Paris, 1965.

[8] J. H. Dunn, D. D. Howard, A. M. King, « Phenomena of Scintillation Noise in Radar-Tracking Systems », *Proc. I.R.E.,* vol. 47, n° 5, part I, p. 855-863, may 1959.

[9] J. C. Gille, M. Pelegrin, P. Decaulne, *Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis,* Dunod, Paris, 1960.

[10] J. P. Gouyet, « Utilisation de la transformation en Z pour l'étude de la poursuite automatique des informations radar », *Annales de Radioélectricité,* t. XVII, n° 67, p. 30-58, janvier 1962.

[11] C. Hastings, *Approximations for Digital Computers,* Princeton University Press, Princeton, 1955.

[12] C. E. Jacobs, « Experimental Investigation and Improvement of computer logics for Automatic Track-While-Scan Systems », Shape Technical Center, *T. R. 51,* january 1965.

[13] E. I. Jury, *Sampled Data Control Systems,* John Wiley and Sons, New York, 1958.

[14] E. I. Jury, *Theory and Application of the Z-Transform Method,* John Wiley and Sons, New-York, 1964.

[15] A. B. Lees, « Interpolation and Extrapolation of Sampled Data », *I.R.E. Trans. Information Theory,* march 1956, p. 12.

[16] P. Lefèvre, « Performances optimales du guidage par alignement en présence de bruit », *Mémorial de l'Artillerie française,* t. 34, 3e fasc., 1960.

[17] P. Lefèvre, « Nouvelle procédure d'optimisation statistique fondée sur la transformation $v = (z - 1)/(z + 1)$ », 2d Congrès I.F.A.C., n° 157, Bâle, 1963.

[18] P. Lefèvre, *Optimalisation statistique des systèmes dynamiques,* Dunod, Paris, 1965.

[19] N. Levine, « A New Technique for increasing the Flexibility of Recursive Least Squares Data Smoothing », *The Bell System Technical Journal,* vol. XV, n° 3, p. 821-840, may 1961.

[20] Y. V. Linnik, *Méthode des moindres carrés,* Dunod, Paris, 1963.

[21] A. Longatte, « Générateur digital de bruit blanc », *S.T.C.A.N., C. R.* n° E 570, octobre 1963.

[22] S. Magowan, « A Method of Plot to Track Correlation », *R.R.E. Memorandum,* n° 2153, january 1965.

[23] N. M. Martin, « An Exact recursion Method for the Determination of Alpha-Beta parameters under constant X-Y Noise », *Remington Rand Univac,* october 1961.

[24] E. Morice, F. Chartier, *Méthode statistique,* t. II, I.N.S.E.E., Paris, 1954.

[25] G. C. Newton, L. A. Gould, J. F. Kaiser, *Analytical Design of Linear Feedback Controls,* John Wiley and Sons, New York, 1957.

[26] B. W. Oakley, « Track Position Forecasting », *R.R.E. Memorandum,* june 1964.

[27] J. R. Ragazzini and G. F. Franklin, *Sampled Data Control Systems,* Mc Graw Hill, New York, 1958.

[28] H. P. Simpson, « A Method of Processing Radar Plot Data to obtain Control Velocity and Turn Information », *R.R.E. Memorandum,* n° 1924, july 1962.

[29] J. Sklansky, « On closed form Expression for mean Squares in discrete continuous Systems », *I.R.E. Trans. on Automatic Control,* vol. A.C. 4, p. 21, march 1958.

[30] A. K. Susskind, *Notes on Analog-digital Conversion Techniques,* John Wiley and Sons, New York, 1957.

[31] A. I. Talkin, « Adaptive Servo Tracking », *I.R.E. Trans. on Automatic Control,* vol. A.C. 6, n° 2, p. 167-172, may 1961.

[32] P. L. Thellier, « Compensation d'un asservissement sujet à saturation à l'aide d'un compensateur arithmétique », *Annales des Télécommunications,* juillet-août 1960.

[33] P. L. Thellier, « Optimisation et auto-optimisation des systèmes de commande à données échantillonnées en présence de saturation », thèse de doctorat d'État, Grenoble, 1962; *Mémorial de l'Artillerie française,* 3e fasc., 1961.

[34] N. Wiener, *The extrapolation, interpolation and smoothing of stationnary times series,* John Wiley and Sons, New York, 1950.

[35] P. M. Woodward, *Probabilités. Analyse fréquentielle. Information. Théorie du radar.* Eyrolles, Paris, 1960.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Résumé 373

Préliminaires :

1. Le problème de la détection 374
2. Rappels sur les systèmes à données échantillonnées 375
3. Rappels sur les variables aléatoires 375

Introduction 377

CHAPITRE I^er. — CORRECTEUR OPTIMAL SUIVANT LA THÉORIE DE L'OPTIMISATION DE WIENER ÉTENDUE AU DOMAINE Z

1.1. Schéma général. Notations 379
1.2. Expression générale du correcteur en fonction des spectres du signal et du bruit .. 380
1.3. Cas où l'entrée évolue par échelons de vitesse 382
1.4. Cas où l'entrée évolue par échelons d'accélération 389

CHAPITRE II. — UTILISATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS POUR DES TRAJECTOIRES DÉCRITES À VITESSE CONSTANTE OU À ACCÉLÉRATION CONSTANTE

2.0. Introduction 395
2.1. Entrée évoluant à vitesse constante 395
2.2. Entrée évoluant à accélération constante 405
2.3. Conclusion 414

CHAPITRE III. — CHOIX DU SYSTÈME D'AXES

3.1. Conditions de poursuite séparée sur chaque axe 415
3.2. Utilisation des coordonnées polaires 417

CHAPITRE IV. — DÉTECTION DES BIFURCATIONS

4.0. Introduction 421
4.1. Modèle de l'entrée 421
4.2. Aire d'évolution et aire de bruit 422
4.3. Principe de la détection des bifurcations 424
4.4. Calcul de $p(\gamma = 0|Z_n)$ 424
4.5. Calcul numérique 426

CHAPITRE V. — CALCUL DU CORRECTEUR EN TENANT COMPTE DES BIFURCATIONS

5.0. Introduction 433
5.1. Première méthode sans estimation de γ 434
5.2. Deuxième méthode avec estimation de γ 437
5.3. Conclusion 440

CHAPITRE VI. — PERFORMANCES DU CORRECTEUR SANS ESTIMATION DE L'ACCÉLÉRATION

6.1. Trajectoire-test 441
6.2. Choix *a priori* de la valeur de A 441
6.3. Valeurs limites de α, β et F en fonction de A 442
6.4. Réponse à un échelon de vitesse pour A = 0,999 446
6.5. Réponse à l'échelon de vitesse pour diverses valeurs de A 450
6.6. Influence de la variation des dimensions de la fenêtre 455

CHAPITRE VII. — PERFORMANCES DU CORRECTEUR AVEC ESTIMATION DE L'ACCÉLÉRATION

7.0. Introduction 457
7.1. Expressions mathématiques de $E(x)$, $E(w)$, $E(x^2)$, $E(w^2)$ et $E(xw)$ 457
7.2. Calculs numériques 464
7.3. Analyse des performances du correcteur 469
7.4. Conclusion 477

CHAPITRE VIII. — POURSUITE COOPÉRATIVE

8.0. Introduction 479
8.1. Détermination *a posteriori* de la loi du mouvement 479
8.2. Connaissance *a priori* de la loi du mouvement 485

CHAPITRE IX. — CONDITIONS TECHNIQUES D'UTILISATION

9.0. Introduction 491
9.1. Critères de choix des paramètres α et β 491
9.2. Caractéristiques de la table des paramètres α et β 492
9.3. Règle d'utilisation 492
9.4. Transmission irrégulière d'informations 492
9.5. Conclusion 493

Conclusion générale 494

Bibliographie 495

IMPRIMERIE NATIONALE. — 66 8312 055 004 3